

0. A **Méréselmélet** c. tárgy hozzájárulása a „Data Science” néven azonosított, igen keresett ismeretanyaghoz. Az érzékelők forradalma révén elképesztő mennyiségű adat feldolgozására van igény, ezért „data scientist”-eket keresnek világszerte. A gazdaság felől következő a megfogalmazás: „Data Science is about transforming data into business value using math and algorithms.” A Harvard Business Review szerint: *Data Scientist: Sexiest Job of the Century*. Gondoljanak erre, amikor elakadnak a tárgy egyes nehezebb részeinél!

1. Emlékeztető: A Méréstechnika c. tárgy keretében megismerkedhettünk a méréselmélet alapjaival a következő címszavak, ill. témakörök mentén:

- Mérés és modellezés
- Modellillesztés
- Mérési hibák (modellezési, átviteli és műszer-hiba)
 - hibaterjedés (a teljes differenciál alkalmazása)
 - mérőeszköz struktúrák (soros, párhuzamos, visszacsatolt)
 - jelátalakítók hibái (nullpont, terhelési, hőmérsékleti, kalibrációs, stb. hibák)
 - a műszerek pontossága (analóg, digitális; alkatrész és frekvenciafüggés)
- Elemi mérési módszerek (differencia, közvetlen és közvetett összehasonlítás, helyettesítő, felcserélési vagy Gauss módszer)
- Mérési sorozat kiértékelése (megadandó a helyes érték legvalószínűbb értéke/becslője, a becslés bizonytalansága; az átlag szórása; konfidencia számítás)
- A mérési bizonytalanság kifejezése (a GUM módszer)

Ezen témakörök ismeretét a Méréselmélet tárgy előtanulmányi követelményének tekintjük, a fenti címszavak közül mélyebben csak a modellillesztés témakörét érintjük.

2. A mérési eljárás: a megismerési folyamat része, amelynek során a rendelkezésünkre álló ismereteinket pontosítjuk, ill. bővítjük. Az 1. ábra a folyamat interpretálását segíti. A mérés során a valóság jelenségeit szeretnénk megragadni. Ezt a „megragadást” előszeretettel végezzük olyan jellemzőkre építve, amelyek valamilyen értelemben stabilitást mutatnak. Ilyen jellemzőkhöz (is) absztrakció révén jutunk. Kiemelt szerephez jutnak

- az állapotváltozók (x), amelyek változásai a kölcsönhatások révén fellépő energia-folyamatokhoz köthetők (feszültség, nyomás, hőmérséklet, sebesség, stb.)
- a paraméterek (a), amelyek a kölcsönhatások intenzitásvizonyait ragadják meg, és
- a struktúrák (S), amelyek a rendszer-komponensek kapcsolatait írják le.

A valóság „tere” egy olyan absztrakció, amelyben a vizsgált jellemzők konkrét értékei a tér egy pontjának felelnek meg. A mérés előtt a pont koordinátáit nem ismerjük. A mérések során egy-egy ilyen pont koordinátáinak meghatározására (megmérésére) törekszünk, ami – ismert módon – csak közelítőleg lehetséges (a mérés hibával terhelt). További nehézség, hogy a mérendő mennyiséghez sok esetben nem férünk közvetlenül hozzá, ezért többnyire csak valamilyen leképzéséből tudunk kiindulni. Ezt a leképzést nevezzük megfigyelésnek. A mérendő és a megfigyelt érték közötti út a mérési/jelátviteli csatorna.

Megfigyelés determinisztikus csatorna esetén: a 2. ábra illusztratív példaként egy időben diszkrét megfigyelőt mutat be. A „valóságot” és a megfigyelést leíró állapot, ill. megfigyelési egyenletek:

$$x(n+1) = Ax(n), \quad (1)$$

$$y(n) = Cx(n), \quad (2)$$

ahol az $x(n)$ állapotvektor N dimenziós, az A állapotátmenet mátrix $N \times N$ dimenziós, az $y(n)$ megfigyelés $M \leq N$ dimenziós vektor, a C megfigyelési mátrix pedig $M \times N$ dimenziós.

Célunk az $x(n)$ állapotvektor becslése. Ennek eszköze a megfigyelő, amely a „valóság” másolata igyekszik lenni azáltal, hogy egy korrekciós/tanuló/adaptáló mechanizmus eredményeképpen követi azt. A követés bekövetkeztével a mérés „eredménye” $\hat{x}(n)$ a megfigyelőből olvasható ki. A megfigyelőben megvalósuló „másolat” állapot, ill. megfigyelési egyenletei:

$$\hat{x}(n+1) = A\hat{x}(n) + Ge(n), \quad (3)$$

$$\hat{y}(n) = C\hat{x}(n), \quad (4)$$

ahol a G korrekciós mátrix $N \times M$ dimenziós, $e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$. A G mátrixot úgy tervezzük meg, hogy $\hat{x}(n) \rightarrow x(n)$. (1) és (3) különbségét képezve:

$$x(n+1) - \hat{x}(n+1) = Ax(n) - A\hat{x}(n) - Ge(n) = (A - GC)(x(n) - \hat{x}(n)). \quad (5)$$

Bevezetve az $\varepsilon(n+1) = x(n+1) - \hat{x}(n+1)$, valamint az $F = A - GC$ jelöléseket, az ún. hibarendszer állapotátmenet mátrixa:

$$\varepsilon(n+1) = F\varepsilon(n). \quad (6)$$

A G korrekciós mátrixot úgy kell megtervezni, hogy $\varepsilon(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, aminek érdekében célszerűen $\varepsilon(n+1) < \varepsilon(n)$, $\forall n$ -re, azaz F csökkenti $\varepsilon(n)$ hosszát minden lépésben, vagyis idegen szóval „kontraktív”.

Megjegyzések:

1. Az $\varepsilon(n)$ hibavektorral kapcsolatos egyenlőtlenség értelemszerűen a vektor hosszára (normájára) értelmezendő, skálár esetben pedig a hiba abszolút értékére.
2. A hiba eltűnéséhez természetesen nem kell megkövetelnünk a csökkenés monotonitását, csak a hibarendszer stabilitását, azaz külső gerjesztés nélküli esetben a nullához konvergálását. Ez interpretálható úgy is, hogy a hibarendszer a belső energiáját a stabil állapot elérése érdekében leadja, idegen szóval disszipálja. Ha ez a disszipáció az iteráció minden lépésében fennáll, akkor a hibavektor hosszának csökkenése monoton folyamat lesz.

Esetek:

1. $F = A - GC = 0$. Ebben az esetben $G = AC^{-1}$. Ez akkor lehetséges, ha C négyzetes, azaz a megfigyelés éppen annyi komponensű, mint maga az állapotvektor. Így aztán nem is csoda, hogy iteráció nélkül, egyetlen lépésben meg tudjuk határozni az állapotvektor értékét. Ez azt jelenti, hogy a megfigyelő, ezen belül a „másolat”, egyetlen lépés után követni képes a megfigyelt (fizikai) rendszert.
2. $F^N = (A - GC)^N = 0$. Ebben az esetben a hibarendszer N lépésben konvergál:

$$x(N) - \hat{x}(N) = (A - GC)^N (x(0) - \hat{x}(0)) = 0 \quad (7)$$

Az $F^N = 0$ tulajdonságú mátrixok, az ún. nemderogatórius nilpotens mátrixok, amelyek sajátja, hogy valamennyi sajátértékük nulla. Az ilyen tulajdonságú állapotátmenet mátrixszal jellemezhető rendszerek véges impulzusválaszúak (ún. *FIR* rendszerek), hiszen a kezdeti hiba véges lépésben eltűnik. (Megjegyzés: ha $F^M = 0$, ahol $M < N$, akkor F ún. derogatórius nilpotens mátrix, ilyenkor a konvergencia kevesebb, mint N lépésben bekövetkezik.)

3. Ha $F^N = (A - GC)^N \neq 0$, akkor a stabilra tervezett hibarendszer állapotvektorának hossza exponenciális jelleggel fog csökkenni. Egy ilyen hibarendszer akkor lesz stabil, ha összes

sajátértéke az egységsugarú körön belül helyezkedik el. Az ilyen tulajdonságú állapotátmenet mátrixszal jellemezhető rendszerek végtelen impulzusválaszúak (ún. *IIR* rendszerek), mert a kezdeti hiba csak végtelen lépésben tűnik el.

Példák:

1. *Példa:* Adott $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Hogyan állítsuk be G -t? $G = AC^{-1} = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

2. *Példa:* Adott $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $C = [1 \quad 1]$. Hogyan állítsuk be G -t? $G = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = ?$

$GC = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} [1 \quad 1] = \begin{bmatrix} g_0 & g_0 \\ g_1 & g_1 \end{bmatrix}$. $[A - GC] = \begin{bmatrix} 1 - g_0 & -g_0 \\ -g_1 & -1 - g_1 \end{bmatrix}$. $[A - GC]^2 = 0$ alapján határozzuk

meg G -t:

$$\begin{bmatrix} 1 - g_0 & -g_0 \\ -g_1 & -1 - g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - g_0 & -g_0 \\ -g_1 & -1 - g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2g_0 + g_0^2 + g_0g_1 & -g_0 + g_0^2 + g_0 + g_0g_1 \\ -g_1 + g_1^2 + g_1 + g_0g_1 & 1 + 2g_1 + g_1^2 + g_0g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A mellékálló kifejezéseit a főátló kifejezéseibe behelyettesítve kapjuk: $1 - 2g_0 = 0$, illetve $1 + 2g_1 = 0$, amiből: $g_0 = 0.5$ és $g_1 = -0.5$. Ellenőrzésképpen:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. *Példa:* Határozzuk meg $[A - GC]$ sajátértékeit a 2. *Példa* eredményének felhasználásával:

$$\det[\lambda I - A + GC] = 0 = \det \begin{bmatrix} \lambda - 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & \lambda + 0.5 \end{bmatrix} = (\lambda - 0.5)(\lambda + 0.5) + 0.25 = \lambda^2 - 0.25 + 0.25 = 0.$$

Mindkét sajátérték nulla.

Megjegyzés:

1. Ez a tulajdonság általánosan igaz véges lépésben konvergálni képes rendszerek esetében.
2. Az ilyen rendszerek átviteli függvénye olyan (elfajuló) racionális törtfüggvény, amelynek valamennyi pólusa az origóban van:

$$H(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N} = \frac{a_N + a_{N-1}z + a_{N-2}z^2 + \dots + a_1 z^{N-1}}{z^N} \quad (8)$$

Ezek az ún. véges impulzusválaszú (*FIR*) szűrők. (8) időtartománybeli megfelelője:

$$y(n) = a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \dots + a_N x(n-N), \quad (9)$$

ahol a valós idejű kiszámíthatóság miatt csak $x(n)$ korábbi mintái szerepelhetnek.

3. A 3. *példában* a sajátértékekre vonatkozó feltétel felhasználható a g_0 és a g_1 értékek meghatározására:

$$\det[\lambda I - A + GC] = 0 = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 + g_0 & g_0 \\ g_1 & \lambda + 1 + g_1 \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda(g_0 + g_1) + g_0 - g_1 - 1 = \lambda^2 = 0$$

Ebből: $g_0 + g_1 = 0$, ill. $g_0 - g_1 = 1$, amiből: $g_0 = 0.5$ és $g_1 = -0.5$.

Megfigyelés zajos csatorna esetén: Ebben az esetben nem $\varepsilon(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ az elvárásunk, hanem $E[\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{min}$ legyen. Ezzel a hibarendszer (6) állapotegyenletét az

$$E[\varepsilon(n+1)\varepsilon^T(n+1)] = FE[\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)]F^T \quad (10)$$

összefüggés váltja fel. Ez a hiba-mátrix központi szerepet kap a híres Kalman prediktor, ill. szűrő esetében. (R.E. Kalman világhírű, Svájcban élő, magyar származású tudós.)

Megjegyzések:

1. A 2. ábrán látható elrendezés mindkét modellje „gerjeszthető” egy közös gerjesztéssel. Mivel a modellek lineárisak, a szuperpozíció értelmében a megfigyelő konvergenciája változatlanul megvalósul.
2. A 2. ábra szerinti megfigyelőt Luenberger megfigyelőnek nevezzük. Luenberger szerint majdnem minden rendszer megfigyelő. A megfigyelő tulajdonság feltétele, hogy a megfigyelő legyen „gyorsabb”, mint a megfigyelt rendszer, különben nem képes követni a változásokat.
3. Egy ellenállás- vagy impedancia-mérő híd ismeretlen elemet tartalmazó hídága a valóság fizikai modellje, a kiegyenlítő elemet tartalmazó ága pedig a megfigyelőben felépülő, beállítható/hangolható modell. A hídágak osztópontján megjelenő feszültségek különbsége vezérli a hangolást, és a végén a két feszültség megegyezik, a beállítható elemről leolvasott érték segítségével meghatározható az ismeretlen. Ez az áramkör, a hangolást végző operátor részvételével megvalósítja a megfigyelőt.

A zajos csatorna modellezése: Véletlen események leírására valószínűségi változókat, ill. sztochasztikus folyamatokat használunk. Az $x(\omega)$ valószínűségi változó egy olyan függvény, amely a valószínűségi eseménytér ω eseményeihez valós számokat rendel. A véletlen jelenségekből származó mintákból hisztogramot készítve megkapjuk a valószínűség sűrűségfüggvény statisztikai jellemzését (lásd 3. ábra). Ha a hisztogram felbontását minden határon túl finomítjuk, és végtelen számú kísérletet végzünk, akkor megkapjuk az ún. valószínűség sűrűségfüggvényt. Ennek integrálja, azaz a görbe alatti területe egy adott u -ig terjedően

$$F(u) = \int_{-\infty}^u f(v)dv = P(x \leq u), \quad (11)$$

az ún. eloszlásfüggvény, ami megmondja mennyi annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó értéke u -nál nem nagyobb. Az $x(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat egy olyan függvény, amely a valószínűségi eseménytér ω eseményeihez valós időfüggvényeket rendel (lásd 4. ábra). Ezen függvények adott időpontbeli (pl. t_1) értékei egy valószínűségi változót reprezentálnak.

3. A döntésemélet alapjai

Példa: detektálás radarral. Bináris vagy kéthipotézises döntés. A mérési eljárás blokkvázlatát az 5. ábrán láthatjuk. A csatorna zajos, ugyanarról a jelenségről rendre eltérő értékű megfigyeléseket kapunk. El kell döntenünk, hogy a döntés során a két lehetséges hipotézisből melyiket fogadjuk el:

H_0 hipotézis: az (ellenséges) objektum nincs jelen.

H_1 hipotézis: az (ellenséges) objektum jelen van.

Lehetséges hibák:

Elfogadjuk H_0 -t, holott H_1 igaz. Ennek valószínűsége P_M (miss probability),

Elfogadjuk H_1 -t, holott H_0 igaz. Ennek valószínűsége P_F (false alarm probability).

A döntéshez előzetesen felvesszük a megfigyelések hisztogramját, és abból közelítőleg előállítjuk az $f(z|H_0)$ és $f(z|H_1)$ feltételes sűrűségfüggvényeket. A feltétel egyik vagy másik hipotézisnek megfelelő viselkedés. (Vegyük észre, hogy ez egy tanulási fázis.) A két

sűrűségfüggvény egymáshoz való viszonyát a 6. ábra mutatja be. Keressük a döntési küszöböt. Az ehhez alkalmazható konkrét stratégia a rendelkezésre álló információ függvénye.

Kéthipotézises Bayes döntés:

- Feltételei: 1. Ismerjük az ún. a priori valószínűségeket: $H_0 \rightarrow P_0$ és $H_1 \rightarrow P_1$.
 2. Ismerjük a csatornakarakterisztikákat: $f(z|H_0)$ és $f(z|H_1)$.

Definiáljuk a költségeket:

C_{ij} annak a költsége, hogy az i -edik hipotézist fogadtuk el, holott a j -edik igaz.

Értelmezzük a bekövetkezési valószínűségeket:

$P(H_i|H_j)$, ahol az i index a feltételezett hipotézis, a j index pedig a bekövetkezett kimenetel azonosítója.

A cél: az átlagos kockázat (risk)/költség (cost) minimalizálása:

$$R = C_{00}P_0P(H_0|H_0) + C_{10}P_0P(H_1|H_0) + C_{01}P_1P(H_0|H_1) + C_{11}P_1P(H_1|H_1) \quad (12)$$

Vegyük észre, hogy az első két tag esetében a H_0 hipotézisnek megfelelő kimenetel következett be, míg a második kettőnél a H_1 szerinti. A kifejezés minimumát a döntési küszöb értékének alkalmas megválasztásával érjük el. Jelölje Z_i az elfogadás tartományát. Erre vonatkozóan határozzuk meg a bekövetkezési valószínűségeket az alábbiak szerint:

$$P(H_i|H_j) = \int_{Z_i} f(z|H_j)dz, \quad (13)$$

ezzel (12)

$$R = C_{00}P_0 \int_{Z_0} f(z|H_0)dz + C_{10}P_0 \int_{Z_1} f(z|H_0)dz + C_{01}P_1 \int_{Z_0} f(z|H_1)dz + C_{11}P_1 \int_{Z_1} f(z|H_1)dz. \quad (14)$$

Mivel a két elfogadási tartomány együttesen lefedi a teljes eseményteret, ezért a sűrűségfüggvények integráljai az egyik elfogadási tartomány felett megegyeznek az egység és a másik elfogadási tartomány feletti integrálok különbségével. A Z_1 feletti integrálokat lecserélve Z_0 feletti integrálokkal (14) a következő alakban írható:

$$R = C_{10}P_0 + C_{11}P_1 + P_0(C_{00} - C_{10}) \int_{Z_0} f(z|H_0)dz + P_1(C_{01} - C_{11}) \int_{Z_0} f(z|H_1)dz. \quad (15)$$

Tegyük fel, hogy $C_{10} > C_{00}$, és $C_{01} > C_{11}$, továbbá tekintsük a döntési küszöb helyét a (15) összefüggésbeli egyváltozós integrál függvény független változójának. E szerint a változó szerint keresve (15) szélsőértékét azt kapjuk, hogy az átlagos kockázat minimuma a z változó azon értékénél (a keresett döntési küszöbértéknél) van, amelyre

$$P_0(C_{10} - C_{00})f(z|H_0) = P_1(C_{01} - C_{11})f(z|H_1). \quad (16)$$

A (16) alapján kiadódó döntési küszöbértéktől akár jobbra, akár balra eltérve a (15) szerinti átlagos kockázat növekedni fog. Ennek belátását segíti, ha a (16) összefüggést z függvényében ábrázoljuk, és megvizsgáljuk a (15) összefüggésbeli integrálok alakulását annak feltételezésével, hogy küszöb a kijelölt értéktől jobbra vagy balra eltér. A (16) összefüggés átírásával kapjuk:

$$\frac{f(z|H_1)}{f(z|H_0)} = \frac{P_0(C_{10} - C_{00})}{P_1(C_{01} - C_{11})} = \eta, \quad (17)$$

Méréselmélet: 1. előadás, 2014.02.12.

azaz a döntési küszöb értékénél a két feltételes sűrűségfüggvény hányadosa egy előre adott konstans. (A (17) összefüggésben z a döntési küszöb értékét veszi fel.) Ha az aktuálisan megfigyelt értéket behelyettesítjük a

$$\Lambda(z) = \frac{f(z|H_1)}{f(z|H_0)}, \quad (18)$$

ún. „likelihood” arány függvénybe, és ha $\Lambda(z) > \eta$, akkor a döntés H_1 , ha $\Lambda(z) < \eta$, akkor a döntés a H_0 . Tömören írva:

$$\Lambda(z) \begin{cases} > \eta \\ < \eta \end{cases} \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix} \quad (19)$$

Ez az ún. Bayes döntési szabály vagy likelihood arány teszt.

