

5. mérés

Frekvenciatartománybeli jelanalízis

1. Bevezetés

Periodikusan ismétlődő jelenségek leírásakor gyakran beszélünk ismétlődési frekvenciáról, annak felharmonikusairól, amplitúdó- és fázisviszonyairól, valamint ezekre alapozva a jelenség frekvenciatartománybeli reprezentációjáról. A Fourier-analízis eszköztárával az időtartománybeli leírással egyenértékű frekvenciatartománybeli leírás adható meg a jelek széles osztályára, ezen belül a mérnöki gyakorlat szempontjából fontos periodikus jelek szinte mindegyikére. A frekvenciatartományban történő gondolkodás sok gyakorlati probléma megoldását segíti. A jelanalízishez kapcsolódóan sokszor az időtartománybeli leírásnál lényegesen tömörebb jelreprezentációt tesz lehetővé, a jelfeldolgozás során pedig az egyes komponensek szétválasztása – alkalmas szelektív szűrők segítségével – gyakran a frekvenciatartománybeli tulajdonságok alapján történik. Mind jelek átvitelénél, mind mérésénél előnyösen használjuk a frekvencia-transzponálás módszerét, ami szintén a frekvenciatartománybeli viszonyok ismeretét igényli.

Rendszerek vizsgálatánál előszeretettel alkalmazunk periodikus gerjesztőjeleket, mert a rendszer kimenetén az ezekre adott válasz az állandósult állapot elérését követően ugyancsak periodikus, és ezáltal a rendszer átviteli tulajdonságai az egymásnak megfelelő bemenő-, ill. kimenőjel-komponensek amplitúdó- és fázisbeli eltéréseivel adhatók meg. A Fourier-transzformáció alkalmazásával a dinamikus rendszerek differenciálegyenlettel történő időtartománybeli leírása algebrai egyenletrendszerre egyszerűsödik, amelynek megoldása sokkal egyszerűbb.

2. A mérés célja

A mérés során a hallgatók megismerkednek a jelek Fourier-transzformációval történő vizsgálatával, összehasonlítják az idő- és frekvenciatartománybeli leírást, mérési módszert sajátítanak el amplitúdókarakterisztika meghatározására, példákat látnak a mérés technika gyakorlati alkalmazására, valamint a spektrumanalízis használatára időtartományban nehezen detektálható tulajdonságok feltérképezésére. A mérés további célja a hallgatók által már korábban megismert jel- és rendszerelmélet mérnöki feladatokban történő felhasználása. A hangsúly a jelek vizsgálatán van, hogy a későbbi mérések során rendszerek tulajdonságaira, jellemzőire tudjanak majd a hallgatók következtetni.

3. A mérés elméleti alapjai

3.1. Periodikus jelek felbontása, jelek spektruma

Korábbi tanulmányokból ismert, hogy egy valós értékű periodikus jel mindig felírható koszinusz- és szinuszfüggvények lineáris kombinációjaként például a következő alakban (a periódusidőt T -vel jelölve, a jel alapfrekvenciája $f_0 = 1/T$, körfrekvenciája $\omega_0 = 2\pi/T$):

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (U_k^A \cos k\omega_0 t + U_k^B \sin k\omega_0 t), \quad (4-1)$$

ahol az együtthatók a következőképpen számíthatók:

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, \quad U_k^A = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos k\omega_0 t dt, \quad U_k^B = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin k\omega_0 t dt. \quad (4-2)$$

Az ilyen jelreprezentációt Fourier-sorfejtésnek hívjuk. Ez a sorfejtés az elvi alapja annak, hogy periodikus jelekkel történő vizsgálatok mindig visszavezethetők szinuszos jelek szuperpozíciójára.

Egyszerű periodikus jelek Fourier-sorának együtthatói megtalálhatók az [1] irodalomban.

A Fourier-sorfejtés komplex alakja a következő:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{U}_k^C e^{jk\omega_0 t}, \quad \text{ahol } \bar{U}_k^C = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4-3)$$

Az Euler-formula alapján a valós és komplex Fourier-sor együtthatói közötti kapcsolat is megadható:

$$\begin{aligned} U_0 &= \bar{U}_0^C \\ U_k^A &= 2 \operatorname{Re}\{\bar{U}_k^C\}, \\ U_k^B &= 2 \operatorname{Im}\{\bar{U}_k^C\} \end{aligned} \quad (4-4)$$

A Fourier-sorfejtés kiterjesztése a Fourier-transzformáció (spektrális előállítás), amely négyzetesen vagy abszolút integrálható jelekre a következőképpen néz ki:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (4-5)$$

amiből a jel a következőképpen állítható elő:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4-6)$$

A mérnöki gyakorlatban használt (négyzetesen nem integrálható) jelek esetén (Dirac-impulzus, egységugrás, ill. az összes periodikus jel) a fenti definíció klasszikus értelemben nem konvergens, Fourier-transzformáltjuk a Dirac-delta segítségével azonban értelmezhető (lásd [1] irodalom).

Periodikus jelek spektruma (Fourier-transzformáltja) úgy adódik, hogy a Fourier-sor által számított frekvenciákra a Fourier-együtthatóknak megfelelő nagyságú Dirac-deltákat illesztünk. A komplex exponenciális ($e^{j\omega t}$) spektruma a Dirac-impulzus ω frekvencián, így az általános periodikus függvény Fourier-transzformáltja a következőképp adódik a (4-3) által számított Fourier-sor együtthatóiból:

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{U}_k^C \delta(\omega - k\omega_0) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4-7)$$

ahol ω_0 a jel alapfrekvenciája, $\delta(\omega - k\omega_0)$ pedig a $k\omega_0$ frekvencián lévő Dirac-delta. A Dirac-impulzusokat a spektrumábrán vonalakkal ábrázoljuk, ezért mondjuk kevésbé mérnökiek megfogalmazással, hogy a periodikus jelek spektruma "vonalas".

3.2. A Fourier-sor közelítő számítása DFT segítségével

A (4-3) integrál zárt alakban megadott jelekre analitikusan elvégezhető, ugyanakkor gyakran fordul elő az az eset, amikor mért jelek harmonikusainak amplitúdóit (azaz Fourier-sorát) szeretnénk kiszámítani. Ebben az esetben a mért jelünket csak bizonyos időbeli felbontással ismerjük, hiszen az analóg jelet numerikus feldolgozás előtt mintavételeznünk kellett:

$$u[n] = u(n\Delta t), \quad (4-8)$$

ahol $\Delta t = 1/f_s$ a mintavételi időköz, az f_s mintavételi frekvencia reciproka. Ennek megfelelően a T periódusidő alatt $N = T/\Delta t$ mintát veszünk. A (4-3) képlet integrálja ez esetben szummával közelíthető, ami a téglányszabály alkalmazása esetén a következőképpen néz ki:

$$\overline{U}_k^C = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \approx \frac{1}{T} \sum_0^{N-1} u(n\Delta t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} n\Delta t} \Delta t = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} u[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \quad (4-9)$$

ahol kihasználtuk $\omega_0 = 2\pi/T$ és a $\Delta t/T = 1/N$ azonosságokat. Felismerhetjük, hogy az utolsó képlet a diszkrét idejű jel Fourier-sorának definíciója, ugyanez a szumma az $1/N$ tag nélkül pedig a DFT (diszkrét Fourier transzformált). Látszik tehát, hogyha periodikus jel Fourier-komponenseire vagyunk kíváncsiak, azt a jel mintáinak DFT-jéből egyszerű skálázással megkaphatjuk.

Tudjuk azt is, hogy valós jelek Fourier-sora és Fourier-transzformáltja a negatív frekvenciákon a pozitív frekvenciák komplex konjugáltjaként kapható meg, azaz ezek abszolút értéke a nulla frekvenciára szimmetrikus. Így elég csak a pozitív frekvenciákat megjeleníteni.

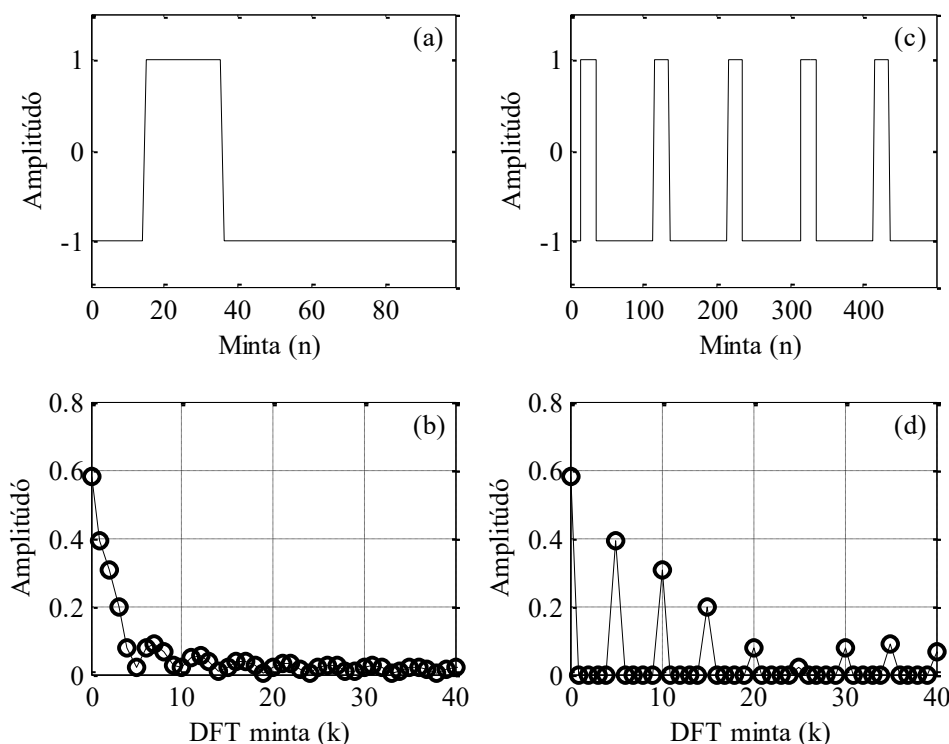
A laborban használt Agilent oszcilloszkóp beépített "FFT" funkcióval rendelkezik. Vizsgáljuk meg, mit is jelenthet ez a gyakorlatban! Az FFT a Fast Fourier Transform rövidítése, és tulajdonképpen a DFT hatékony megvalósítását jelenti, eredménye a DFT-vel ekvivalens. Azonban tudjuk, hogy a műszert periodikus jelek elemzésére tervezték, így az igazából nem a DFT, hanem a Fourier-sor értékeit jelzi ki, azaz az $1/N$ -es skálázást is tartalmazza. Világos, hogy a Fourier-sor az 1 V csúcsértékű szinuszejel esetén 0.5 V amplitúdót mutat, hiszen az 1 amplitúdójú szinuszelet egy pozitív- és egy negatívfrekvenciás, 0.5 amplitúdójú komplex exponenciálisból állítja elő. Ezért, ha a szinuszelek csúcsértékét helyesen szeretnénk kijelezni, a kapott értékeket kétfelével meg kell szorozni. Az oszcilloszkóp gépkönyvéből viszont kiderül, hogy a műszer a szinuszos komponensek amplitúdóját akkor mutatja 0 dB-nek, ha azok feszültsége 1 V_{RMS}, ami további $1/\sqrt{2}$ -es skálázást jelent. Ebből arra következtethetünk, hogy a műszer $2/(\sqrt{2}N)$ -es tényezővel skálazza a DFT eredményét a dB-képzés és kijelzés előtt.

3.3. A Fourier sor közelítő számítása és megjelenítése a gyakorlatban

3.3.1. Vonalas spektrumkép előállítása

Periodikus jelek esetén a jelről minden információ a rendelkezésünkre áll, ha a jel egyetlen periódusából számolunk Fourier-sort. Ez az oszcilloszkópon azt jelenti, hogy az "FFT" funkció által számolt minden egyes pont egy-egy harmonikusnak felel meg, amit az oszcilloszkóp a kijelzőn egyenes vonalakkal összeköt. Ennek az eredménye ugyan numerikusan megfelelő, mégis nehezen összeegyeztethető az általunk elvárt "vonalas" képtől. Ezen könnyen segíthetünk, ha több (K) periódus Fourier-sorát számítjuk. Ebben az esetben az eredeti jel alapharmonikusa a K -szor kiterjesztett TK jelperiódus K -adik

harmonikus lesz, a második harmonikus a $2K$ -ik, és így tovább. Pl. a jel tíz periódusának vizsgálata esetén a 10., 20., 30., stb. komponensek lesznek nullától különbözőek, így valóban kialakul a vonalas jellegű spektrum. Ez a hatás látható az alábbi ábrán, $K=5$ esetére.



4–1. ábra. Egy és öt periódusnyi, aszimmetrikus négyszögjel Fourier-sorának számítása: (a) és (c): a jelek az időtartományban, (c) és (d): a DFT segítségével számolt Fourier-együtthatók.

A 4-1. (b) és (d) kis körei a kiszámolt Fourier-együtthatókat mutatják, ezeket egyenes vonalakkal összeköttöttük, hogy az oszcilloszkóp képernyőjén megjelenítetthez hasonló ábrát kapjunk. A (b) ábrán megfigyelhetjük, hogyha csak az összekötő vonalra koncentrálunk, az egyes harmonikusokat nem tudjuk megkülönböztetni. Több (ez esetben öt) periódus mintavételezése és sorfejtése esetén a csúcsok jól elkülönülnek, ez látható a (d) ábrán.

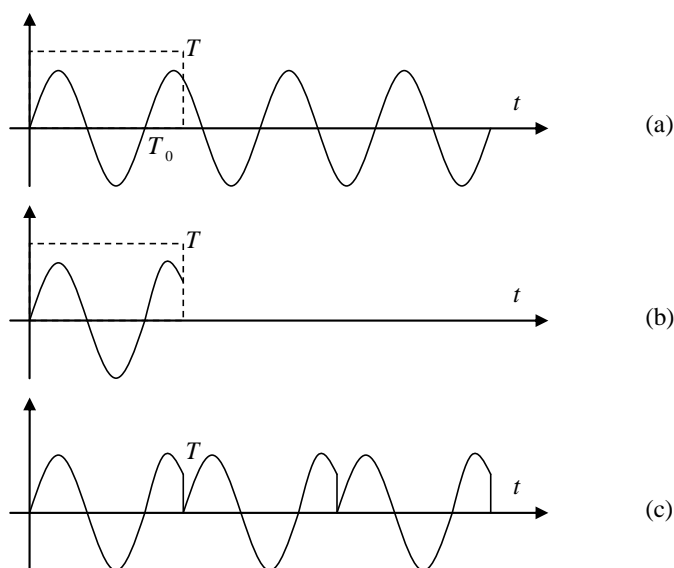
A jelenség a DFT felbontásának elemzésével is megérthető. A DFT felbontása $\Delta f = f_s / N$, az f_0 frekvenciájú jelből pedig egy periódus alatt pontosan $N = f_s / f_0$ mintát veszünk. Ebből adódik, hogy $\Delta f = f_0$, azaz egy periódus elemzése esetén a DFT pontosan a jel harmonikusainak frekvenciáin számítja ki a spektrumot, amiben természetesen nincs semmi meglepő, hiszen a Fourier-sor is ezt teszi. Vizsgáljuk meg, mi történik, ha ugyanebből a jelből K periódusnyi, azaz KN mintát veszünk! Ez esetben a frekvenciafelbontás $\Delta f = f_s / (KN)$, azaz K -szorosára nő, míg a jel alaphfrekvenciája f_0 marad. Ez azt jelenti, hogy a spektrumot a harmonikusok sűrűségénél K -szor finomabban vizsgáljuk, azaz a harmonikusok „közé” látunk.

A vizsgált periódus kiterjesztésének előnye a spektrum vonalassá válása mellett az, hogy a nagyobb mérési időszak tkp. átlagolást is jelent (a jel K periódusának átlagos Fourier-sorát számoljuk, ezzel a jel-zaj viszonyt javítjuk). Emellett a spektrumcsúcsok között megjelenő (elviekben nulla) komponensek nagysága alapján a jel zajszintjére, valamint a zaj jellegére (pl. véletlen, periodikus) is következtethetünk. Az eljárás hátránya, hogy a mérési idő megnő. További megfontolást igényel, hogy a laboratóriumban használt oszcilloszkóp esetén nincs mód az FFT-ben használt N mintaszám növelésére (az fixen 2048), így több periódust csak úgy tudunk elemezni, ha a mintavételi frekvenciát csökkentjük, azaz a jelet K -szor ritkábban mintavételezzük. A mintavételi frekvencia csökkentésével viszont könnyen megszeghetjük a mintavételi tételt, ami átlapolódott frekvenciakomponensek megjelenéséhez vezet. Ez a legtöbb esetben a spektrumképen láthatóvá is válik az elviekben nem várt frekvenciakomponensek megjelenésével, de rosszabb esetben a belapolódó komponensek a jelben eleve jelenlévő csúcsokhoz adódnak hozzá ezzel amplitúdóhibát okozva, amit sokkal nehezebb észrevenni. Itt érdemes azt is megjegyezni, hogy az oszcilloszkóp nem tartalmaz átlapolódásgátló szűrőt, tehát a mi felelőségünk, hogy a vizsgált jel tulajdonságait ill. az elvárt pontosságot figyelembe véve megfelelő mintavételi frekvenciát válasszunk. (A mintavételi frekvencia az időalap beállításával változtatható.)

3.3.2. A vizsgálati ablak megválasztásának hatása

A Fourier-sorfejtés (4-3) képletének elvi alkalmazásánál egyértelmű, hogy az együttthatókat úgy számítjuk, hogy a jel egy teljes periódusára integrálunk. A fentiekben pedig azt tekintettük át, mi történik, ha K teljes periódus Fourier-sorát számítjuk. Mindkét esetre igaz, hogy ha az elemzési ablakba eső jelszakaszt az időben kiterjesztjük (egymás után másoljuk), akkor visszkapjuk az eredeti periodikus jelünket. Ezt nevezik koherens mintavételezésnek.

Gyakorlati mérések esetén azonban sajnos sokszor nem tudjuk a vizsgálati ablakot (a felvett mintaregisztrátum hosszát) úgy beállítani, hogy az pont a mért jel K egész periódusának feleljen meg, gondoljunk csak arra, hogy az oszcilloszkóp időalapja viszonylag durva lépésközzel állítható. Ekkor nem egész periódusnyi jel Fourier-sorát számítjuk, ami az eredeti Fourier-sortól eltérő lesz. Ez a legkönnyebben úgy látható be, ha megvizsgáljuk, hogyan nézne ki az ablakozott jel másolással történő kiterjesztése. Ezt mutatja a 4-2. ábra.



4–2. ábra. Nem-koherens mintavételezés az időtartományban: (a) eredeti jel és az ablakfüggvény (szaggatott vonal), (b) a kivágott és elemzett jelszakasz, és (c) az ablak hossza szerint ismét periodikussá tett jel.

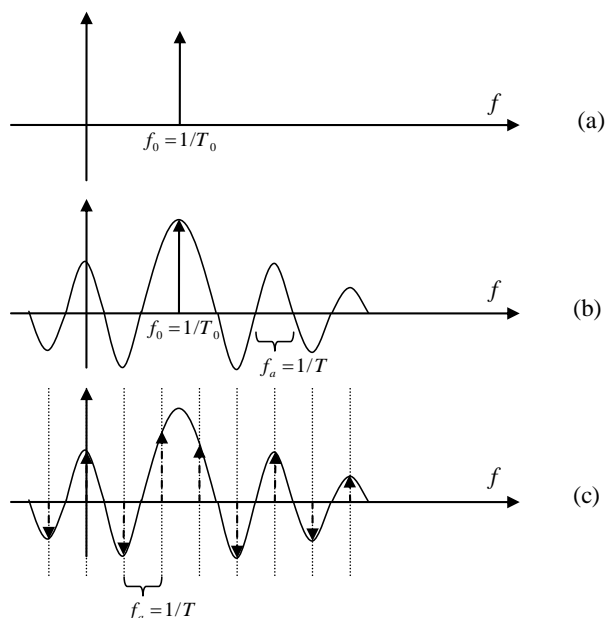
A 4-2. a) ábra az eredeti, T_0 szerint periodikus jelet, valamint a nem egész periódusnyi, T hosszúságú vizsgálati ablakot mutatja. A b) ábrán a kivágott jel látható, tkp. ennek a függvénynek számítjuk a Fourier-sorát. A Fourier-sor a jel periódusidejét T -nek feltételezi, azaz tkp. egy olyan periodikus jel spektrumát számítja, ami az ablak ismételtetésével állna elő. Ez látható a c) ábrán. Világos, hogy ez a jel nem szinuszos, az ugrás miatt végtelen számú harmonikust tartalmaz. Ez egyben azt is jelenti, hogy a számolt komponensek eltérnek az elvárttól. Ezt az esetet nevezzük nem-koherens mintavételezésnek.

3.3.3. Az ablakozás hatásának elemzése a frekvenciatartományban

A jel megfelelő (koherens) ill. nem megfelelő (nem-koherens) ablakozásának hatását a frekvenciatartományban is vizsgálhatjuk, így pontosabb képet kapunk arról, milyen spektrumábrákat várhatunk el az egyes esetekben.

A kivágott (vizsgált), 4-2. (b) ábrán megfigyelhető jel az eredeti szinuszjel és egy négyszögablak szorzataként áll elő. Ebből következik, hogy az ablakozott jel spektruma a szinuszjel és a négyszögablak spektrumának konvolúciója. A szinuszjel Fourier-transzformáltja egy-egy Dirac-delta pozitív és negatív frekvencián, a négyszögablaké pedig a sinc függvény, ahol a nullahelyek $1/T$ periodicitással követik egymást. Tehát a kivágott jel Fourier-transzformáltja az $f_0=1/T_0$ frekvencián megjelenő, $f_a=1/T$ periodicitású leszívásokkal rendelkező sinc függvény. Ez látható a 4-3. (b) ábrán. (Az átláthatóság kedvéért a $-f_a$ frekvencián megjelenő sinc függvényt nem ábrázoltuk: a valóságban annak az oldalhullámai is belapolódnak a pozitív frekvenciákra.)

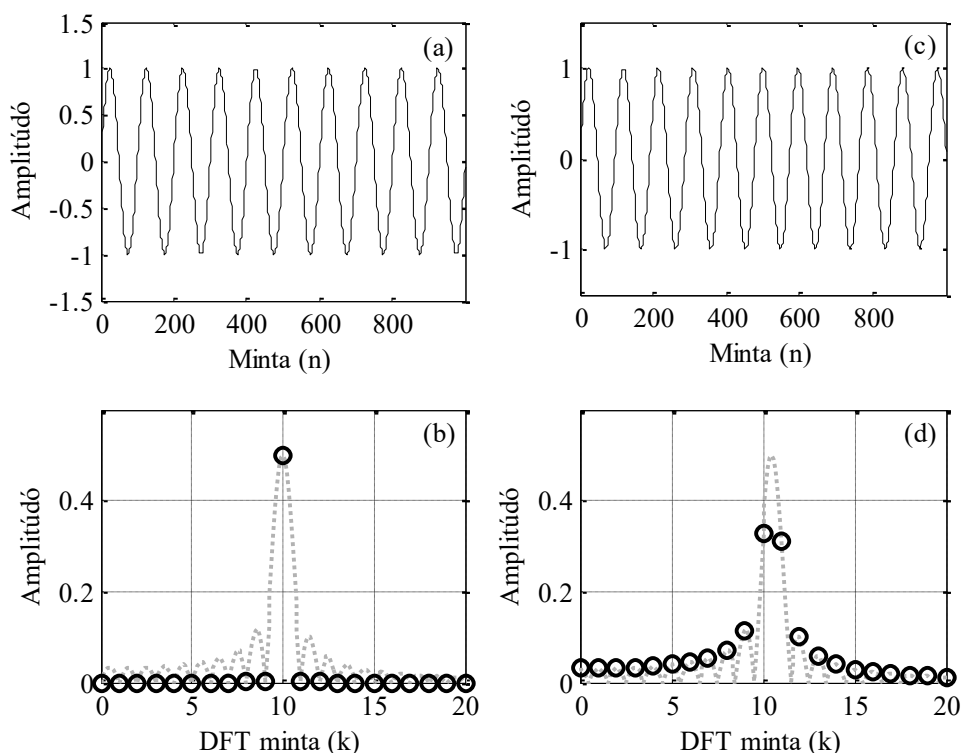
Amikor a jelet periodikussá tesszük a 4-2. (c) ábra szerint, az a Fourier-transzformált mintavételezését jelenti. (Emlékezzünk csak vissza: a mintabételezett időtartománybeli jel ismétlődő, periodikus spektrumot jelent, ennek duálisa, hogy az ismétlődő, periodikus időtartománybeli jel mintavételezett, vonalas spektrumnak felel meg.) Mivel T szerint tesszük periodikussá a jelet, ez $f_a=1/T$ sűrűségű mintavételezést jelent. Ezt a 4-3. (c) ábra szemlélteti. A számolt Fourier-komponensek tehát egy f_a sűrűségű leszívási pontokkal rendelkező, f_0 frekvenciára másolt sinc függvény f_a sűrűségű mintavételezéséből adódnak. Ebből látható, hogyha f_0 jelfrekvencia f_a egész számú többszöröse, akkor a sinc függvény maximumát, és annak zérushelyeit mintavételezzük, azaz egyetlen nullától különböző spektrumértéket kapunk. Ha ez a feltétel nem teljesül (ld. 4-3. ábra), akkor a csúcsot sem találjuk el, ill. a zérushelyek helyett a sinc oldalhullámain mintavételezzük. A spektrumkép alapján azt gondolhatnánk, hogy a jel nem szinuszos, ami a számolt Fourier-sor szempontjából igaz is (ld. 4-2. (c) ábra), pedig a gyakorlatban csak annyi történt, hogy a szinuszjelünket nem megfelelően ablakoztuk.



4–3. ábra. Nem-koherens mintavételezés a a frekvenciatartományban: (a) eredeti jel spektruma, (b) a kivágott (ablakozott) jel spektruma, és (c) az ablak hossza szerint ismét periodikussá tett jel spektruma.

Nézzük meg ezt egy konkrét példára is! A 4-4. ábrán egy szinuszjel ezer mintájából számítunk Fourier-sort a DFT segítségével. A 4-4. (a) ábrán egzaktul 10 periódusnyi szinuszjel Fourier-sorát számítjuk, a (b) ábrán az így előálló spektrumkép látható. A számított DFT együtthatók közül csak a tizedik lesz nullától különböző, hiszen az ablakozásból származó sinc függvényt pont jó helyeken mintavételezzük. A komplex exponenciális amplitúdója 0.5, ami pontosan megfelel az 1 amplitúdójú szinuszjelnek.

A 4-4. (c) ábra azt az esetet mutatja, amikor 10.5 periódusnyi szinuszjel Fourier-sorát számítjuk. Ilyenkor a sinc függvényünk csúcsa a DFT által számolt frekvenciák közé tolódik, így pont a sinc maximumhelyeire mintavételezünk. Az egyetlen csúcs helyett tehát egy elmosódott csúcsot látunk, ezt *spektrumszivárgásnak* (leakage) hívják. Az is látszik, hogy a kívánt 0.5-ös amplitúdó helyett kb. 0.32-es csúcsot mérünk, ami igen jelentős *amplitúdóhibát* okoz. Megjegyezzük, hogy a (b) és (d) ábrákon csak a DFT pozitív frekvenciáinak abszolút értékét ábrázoltuk. A (d) ábrán észrevehetjük, hogy a két legmagasabb mintapont nem egyforma, pedig a sinc függvény szimmetriájából azonos nagyságú csúcsokat várnánk: ennek oka, hogy a negatív frekvencián megjelenő sinc függvény oldalhullámai a pozitív frekvenciákat is kismértékben módosítják.

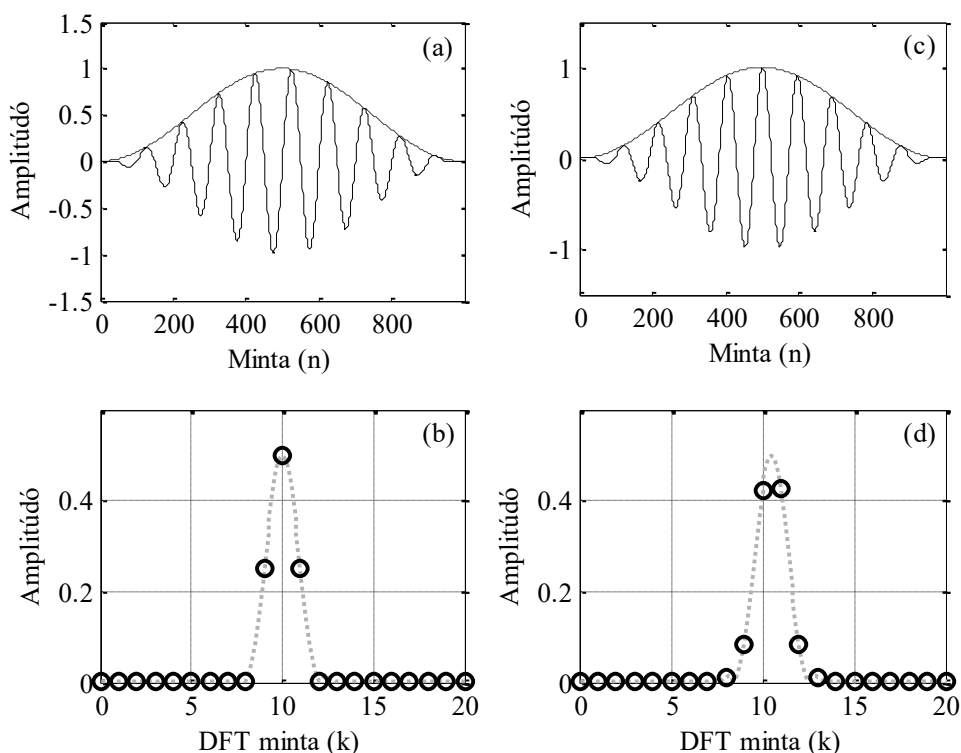


4–4. ábra. Koherens és nem-koherens mintavételezés az idő- és frekvenciatartományban: (a) és (b) 10 periódus mintavételezése, (c) és (d) 10.5 periódus mintavételezése. A (b) és (d) ábrákon a körök a számolt DFT komponenseket jelölik, a szaggatott vonal pedig a mögöttes, folytonos sinc függvényt, amit „mintavételezünk”.

3.3.4. Különböző ablakfüggvények alkalmazása

A jel adott szakaszának kivágását eddig tkp. egy négyszögablakkal történő szorzással oldottuk meg. Felmerül a kérdés, hogy mi történne, ha más ablakfüggvényt alkalmaznánk? A 4-2. ábra alapján logikusnak tűnhet, hogyha a kivágott jel széleit lekerekítenénk (a jelet be- és kiüsztatnánk), a periodikus összeillesztésnél előálló ugrás elkerülhető lenne, így a spektrum nagyfrekvenciás komponenseit csökkenthetnénk. Vizsgáljuk ezt meg a gyakorlatban!

Az egyik legegyszerűbb, és leggyakrabban használt ablakfüggvény a *Hann* ablak, ami tkp. egy -0.5 amplitúdójú koszinusz és egy 0.5 -ös konstans jel összegéből adódik. Ez látható a 4-5. (a) és (c) ábrákon szaggatott vonallal, a 10 és 10.5 periódusnyi, ablakfüggvénnyel szorzott szinuszjelekkel együtt. A (b) és (d) ábrák szaggatott vonalai a Hann ablak Fourier transzformáltját mutatják: látszik, hogy a sinc függvényhez képest szélesebb főhullám, ugyanakkor kisebb oldalhullámok jellemzik. Ennek megfelelően koherens mintavételezés esetén is több mintaponton kapunk nullától különböző értéket (hátrány), ugyanakkor nemkoherens esetben jelentősen csökkentettük a spektrumszivargást (előny). A (d) ábra szerint a várt 0.5 helyett 0.425 -ös amplitúdót mérünk, ami még mindig hibás, de jóval pontosabb, mint a 4-3. ábra négyszögablakos esetében.



4–4. ábra. Koherens és nem-koherens mintavételezés az idő- és frekvenciatartományban, *Hann* ablak alkalmazásával: (a) és (b) 10 periódus mintavételezése, (c) és (d) 10.5 periódus mintavételezése. A (b) és (d) ábrákon a körök a számolt DFT komponenseket jelölik, a szaggatott vonal pedig a mögöttes, folytonos sinc függvényt, amit „mintavételezünk”.

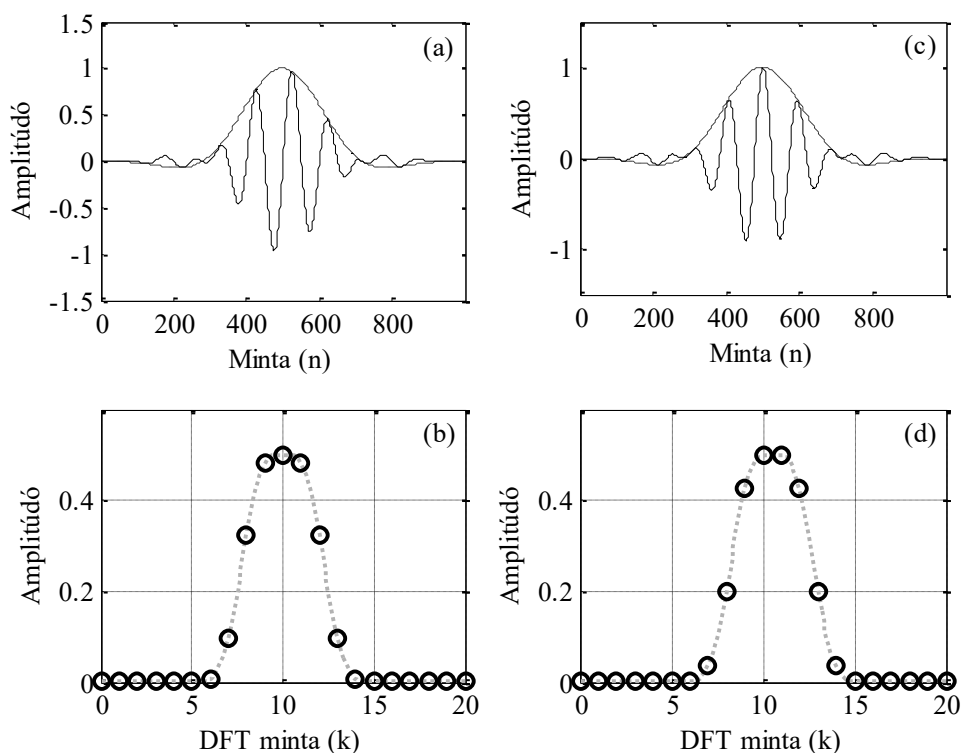
Látható, hogy a szinuszjel amplitúdómérésének hibája abból adódik, hogy az ablakfüggvény Fourier-transzformáltját nem annak csúcsán mintavételezzük. Ez a hiba orvosolható lenne egy olyan ablakfüggvény mintavételezésével, amely Fourier-transzformáltja a csúcsa közelében annyira lapos, hogy még a fél mintaponttal eltolt változatánál is maximális értékű. Ilyen függvény az ún. *Flat top* ablak. Az ablak a 4-5. (a) és (c) ábrákon látható szaggatott vonallal, az ablakozott 10 és 10.5 periódusnyi szinuszjellel együtt. Érdekesség, hogy az ablak bizonyos időpontokban negatív értéket vesz fel. A (b) és (d) ábrákon megfigyelhetjük, hogy a Fourier-transzformált főhulláma sokkal szélesebb és laposabb, így garantálható, hogy nem-koherens mintavételezés esetén is helyes amplitúdót mérjünk (a konkrét esetben ez 0.4995 0.5 helyett, ami elhanyagolható hiba).

Felmerülhet a kérdés, hogyha az amplitúdót a *Flat top* ablak használatával ennyire pontosan tudjuk mérni, miért nem mindig ezt alkalmazzuk? Az ok egyszerű: a széles főhullám miatt a közeli frekvenciakomponensek egymásra lapolódhatnak. Így pl. ha a mintánk a 10 periódusnyi szinuszjel mellett egy jóval kisebb amplitúdójú, 8 periódusnyi szinuszjelet is tartalmazna, a spektrumábrán azt észre sem vennénk a 10 periódusnyi szinuszjel széles főhulláma miatt. Ha azonban biztosak lehetünk benne, hogy a jelben nincsenek egymáshoz nagyon közeli frekvenciakomponensek, mert pl. 3.3.1. pontnak megfelelően a jel több (pl. kb. 10), de nem feltétlenül egész periódusából számítottunk Fourier-sort, ez a veszély nem áll fenn, hiszen akkor csak minden 10-ik DFT-pont közelében lesznek frekvenciakomponensek. Ugyanígy nyugodtan alkalmazhatjuk a *Flat top* ablakot, ha tudjuk, hogy a jelünk egyetlen szinuszos komponensből áll.

Még néhány megjegyzés: a 3.2 pontban láttuk, a DFT által számított értékeket $1/N$ el skalázni kellett ahhoz, hogy a komplex Fourier-sor együtthatóit megkapjuk. Ablakfüggvények alkalmazása esetén nem N -el, hanem az ablakfüggvény mintáinak összegével kell osztani. Ezt természetesen a laborban használt oszcilloszkóp elvégzi helyettünk.

A gyakorlatban, ha a koherens mintavételezést biztosítani tudjuk, mert pl. mi állítjuk elő a mérőjelet is, akkor nem szoktunk külön ablakfüggvényt alkalmazni (ezt az esetet négyzet- vagy rect ablaknak is nevezzük). Ha a koherencia nem biztosítható, általános vizsgálatokra jól használható a *Hann* ablak, elfogadható amplitúdóhibája és viszonylag keskeny főhulláma miatt. Ha azonban a harmonikusok amplitúdóját nagyon pontosan meg szeretnénk határozni, a *Flat top* ablak használata javasolt.

Azt is megjegyezzük, hogy a 4-3. és 4-4. ábrán látható, hogy ha a DFT mintapontjai alatt megbújó, szaggatott vonallal jelölt Fourier-transzformáltak ismernénk, annak csúcsa a szinuszjel amplitúdóját és frekvenciáját nem-koherens esetben is pontosan meghatározná. Ez megtehető a mintapontok közötti interpolációval (sinc függvény), vagy közelítésként a legnagyobb mintapontokra történő parabolaillesztéssel. Erre a laborban használt oszcilloszkóp nem alkalmas, de számítógépes feldolgozás esetén természetesen ilyesmire is lehetőségünk nyílik.



4–5. ábra. Koherens és nem-koherens mintavételezés az idő- és frekvenciatartományban, *Flat top* ablak alkalmazásával: (a) és (b) 10 periódus mintavételezése, (c) és (d) 10.5 periódus mintavételezése. A (b) és (d) ábrákon a körök a számolt DFT komponenseket jelölik, a szaggatott vonal pedig a mögöttes, folytonos sinc függvényt, amit mintavételezünk”.

3.4. Periodikus jelek vizsgálójelként történő felhasználása

A jelek időtartománybeli megjelenése és Fourier-sora (spektruma) között kvalitatív összefüggések is megállapíthatók. Egy gyakran alkalmazott vizsgálójel a négyszögjel (ami tulajdonképpen „periodikus egységugrásként” is felfogható), amit viszonylag könnyen elő lehet állítani megfelelő minőségben. A négyszögjel Fourier-sora a benne lévő szakadás miatt lassan konvergál és éppen ezért sok felharmonikus komponense van, azaz széles frekvenciatartományban gerjeszti a vizsgálandó rendszert. További előnye, hogy a jel spektrumának bizonyos jellegű megváltozása az időtartományban is könnyen észlelhető. Többek között a gyártásközi minőségellenőrzés során szűrők, erősítőfokozatok frekvenciaátvitelének gyors ellenőrzésére szokás négyszögjelet használni. Ha a kimeneti jel szintén egy nagy tisztaságú négyszögjel, akkor biztosak lehetünk abban, hogy a rendszer átvitele széles frekvenciatartományban frekvenciafüggetlen.

Az időtartománybeli jelalak alapján a jel Fourier-soráról (illetve nem periodikus jelek esetén amplitúdóspektrumáról) bizonyos következtetések vonhatók le néhány egyszerű szabály alkalmazásával. A jel sávszélessége megbecsülhető a jel simaságának vizsgálatával. Minél „simább” egy jelforma, Fourier-sorának együtthatói (ill. amplitúdóspektruma) egyre gyorsabban tűnnek el. A függvény simaságát pedig a jel deriváltfüggvényei határozzák meg. Általánosan: egy függvény esetén jelölje k a legalacsonyabb nem folytonos deriváltat, ekkor a transzformált függvény a végtelenben $|s|^{-(k+1)}$ függvényként viselkedik. Ezek alapján érthetővé válik, hogy az impulzusjel, a négyszögjel és a háromszögjel spektruma hogyan viselkedik a magasabb frekvenciákon. A négyszögjelnek már a nulladik deriváltja (önmagja) sem folytonos a jelben lévő ugrások miatt, tehát $k=0$. Ennek megfelelően amplitúdóspektruma $1/f$ jelleggel csökken a frekvencia növekedésével. A háromszögjel spektruma ennél gyorsabban tűnik el, hiszen csak az első deriváltja nem folytonos, tehát $k=1$, ezért a csökkenés $1/f^2$ burkolójú. Szemléletesen: a jelben lévő ugrásokat, éles ‘sarkokat’ nehéz különböző frekvenciájú szinuszjelek összegeként leírni. A négyszögjelhez képest a háromszögjel simábbnak tekinthető, ezért a sávszélessége is kisebb. A tanulság az, hogy a jelben lévő ugrások leírásához jelentős nagyfrekvenciás komponensekre van szükség. Ezek hiányában a jelben lévő ugrásokat simítjuk ki. Itt megjegyezzük azt is, hogy a Fourier-sorával közelített jelben a közelítés hibája a jelugrások környékén lényegesen nagyobb lehet, mint a jelalak többi részénél. Ezt a jelenséget hívjuk Gibbs-oszcillációnak.

3.5. Átviteli karakterisztika mérése

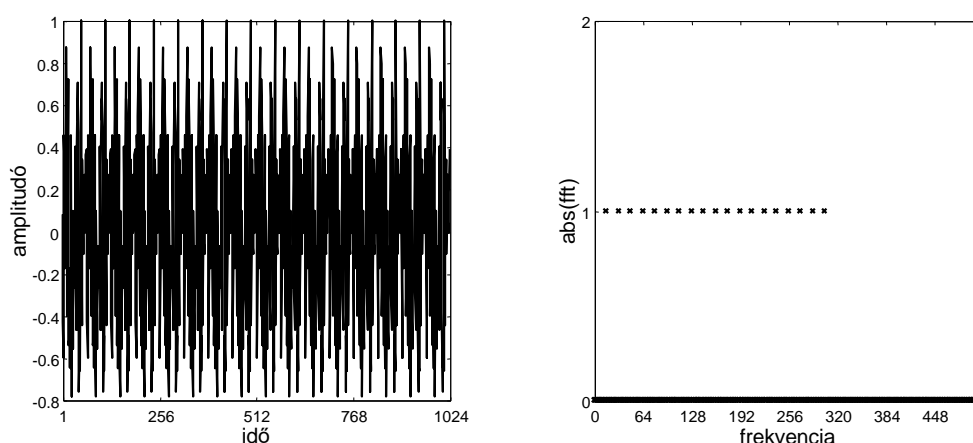
Jól ismert, hogy egy lineáris, időinvariáns rendszer a bemenetére adott szinuszjelnek csak az amplitúdóját és fázisát képes megváltoztatni. Így minden egyes frekvencián megadható egy komplex szám, ami az adott frekvencián a rendszer átvitele. Az átvitel frekvenciafüggését nevezzük átviteli karakterisztikának.

A rendszer átviteli karakterisztikájának megmérésére több módszer is létezik. Ebből az 2. időtartománybeli mérésben azt a módszert vizsgáltuk, amikor egyenként végiglépdelünk az egyes vizsgált frekvenciákon. A szinuszgenerátor és voltmérő alkalmazása átviteli karakterisztika mérésére legtöbbször túlságosan is időigényes. Speciális szélessávú gerjesztőjelek és FFT-analizátor (vagy spektrumanalizátor) alkalmazásával lineáris rendszerek átviteli függvénye egyszerűbben és gyorsabban is meghatározható. Átviteli függvény csak lineáris rendszerek esetén értelmezett, ott pedig érvényes a szuperpozíció elve, azaz megtehetjük, hogy egyszerre több frekvencián gerjesztünk és mérünk. A gerjesztőjel legtöbbször multiszínusz, pásztázó szinusz (swept sine, chirp), periodikus sinc-függvény vagy zaj. A mérés elve, hogy a vizsgált rendszer kimenőjelének DFT-jét számítjuk, így a kimeneti amplitúdókat és fázisokat egy lépésben megkapjuk. Az átviteli függvény pedig a kimeneti- és bemeneti DFT-értékek arányaként áll elő. Hálózatanalizátorok esetén a generátor és a spektrumanalizátor egy műszerben van jelen, és így a gerjesztés és a mérések szinkronitása biztosított. Mivel ez esetben megoldható a koherens mintavételezés (egész

periódusnyi jelet vizsgálunk), ezek a műszerek a DFT számítása előtt külön ablakfüggvényt nem alkalmaznak. A méréseink során mi a szinkronizációt, és így a koherens mintavételezést nem tudjuk biztosítani, így szükséges lehet ablakfüggvény alkalmazása (ld. 3.3.4. pont).

Multiszinus

A multiszinus olyan periodikus gerjesztőjel, amely olyan szinuszjelek összegeként állítható elő, amelyek frekvenciája egy adott frekvencia (az alapprojektencia) egész számú többszöröse. A szinuszjelek amplitúdója szabadon választható, leginkább azonosra célszerű választani őket, hiszen így tulajdonképpen az előző módszert tudjuk alkalmazni egy lépésben. A szinuszjelek fázisát különbözőre kell választani, különben nagy lenne a csúcsnévesség, azaz korlátozott bemenetű rendszer esetén csak kis energiájú jellel tudnánk gerjeszteni, aminek következménye a rossz jel/zaj viszony lehet. A 4-6. ábra az ún. véletlen fázisú multiszinust mutatja, ahol az egyes szinuszos összetevők fázisát véletlenszerűen választjuk meg.



4–6. ábra. Multiszinus az idő- és frekvenciatartományban

Az időtartományban a multiszinus a következőképpen definiálható:

$$x(t) = \sum_{k=1}^F A_k \sin(2\pi f_k t + \phi_k), \quad (4-6)$$

ahol F a gerjesztett frekvenciák száma, és $f_k = k/T$, ahol T a multiszinus egy periódusa.

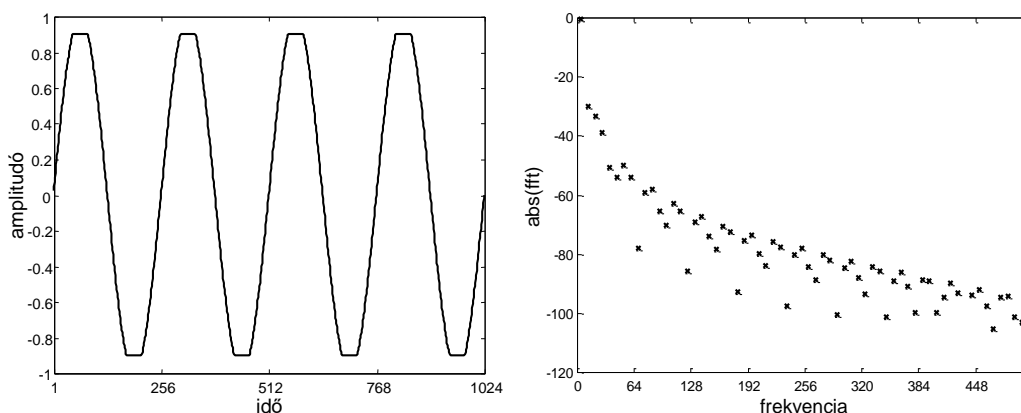
A multiszinus egyik fontos gyakorlati előnye, hogy segítségével elvileg bármilyen amplitúdóspektrum megvalósítható. A mérések során leggyakrabban konstans amplitúdóspektrumot valósítunk meg, így a rendszer amplitúdómenete és a válasz Fourier-transzformáltjának abszolút értéke csak egy konstansban tér el egymástól. Ennek előnye, hogy a karakterisztika jellege a spektrumanalizátor képe alapján rögtön láthatóvá válik.

A laborban használt generátorral a véletlen fázisú multiszinus csak nagyon nehézkesen állítható elő, így a mérésen a nagy csúcsnévesség miatt kevésbé előnyös periodikus sinc függvényt alkalmazunk. Könnyen belátható, hogy a periodikus sinc függvény is tkp. egy multiszinus, de itt a komponenseknek nem csak az amplitúdói, hanem a fázisai is azonosak. A sinc függvény Fourier-transzformáltja ugyanis a négyszög (rect) ablak, a periodikus sinc függvény vonalas spektruma pedig a négyszögablak mintavételezéséből áll elő, így minden harmonikus amplitúdója a sinc sáv szélességéig azonos, utána pedig nulla értékű lesz.

Nemlineáris torzítás hatása

Nemlineáris torzítás alatt a rendszer olyan tulajdonságát értjük, amikor a rendszer kimenete a bemenetnek nem lineáris függvénye. Ha az ilyen statikus karakterisztikát polinommal közelítjük, akkor könnyen belátható trigonometrikus azonosságok alapján, hogy szinuszzel történő gerjesztésnél az állandósult kimenetben a szinuszjel alaphfrekvenciájának többszöröseinél (felharmonikusoknál) is megjelennek komponensek (pl. a szinuszjel négyzetében kétszeres komponens jelenik meg). A jelenséget harmonikus torzításnak is hívják.

A nemlineáris torzítás pl. a függvénygenerátorok egyik kritikus jellemzője. A jelenséget többek között a generátorban jelenlévő nemlinearitások okozzák, ami ezáltal a felharmonikustartalom megnövekedéséhez vezet. A torzítás megjelenhet még rossz mérési összeállítás esetén is. A műszerek nagy részénél a bemeneti tartományt túllépve egy határoló áramkör lép működésbe, és ezáltal a bemenetre adott és a műszer által valójában feldolgozott jel eltérő lesz. Az alábbi ábrán egy ilyen eset látható, az idő- és frekvenciatartományban egyaránt. A művelet hatása ebben a példában mindkét tartományban jól detektálható, függvénygenerátorok – ennél lényegesen kisebb – torzítása azonban az időtartományban nehezebben kimutatható.



4–7. ábra. Nemlineárisan torzult szinuszjel az idő és a frekvenciatartományban

A (harmonikus) torzítás (THD, total harmonic distortion) meghatározására két definíció terjedt el. A két definíció közötti különbség mindössze annyi, hogy a felharmonikus tartalmat a teljes jel (k_1), vagy csak az alapharmonikus (k_2) effektív értékével hasonlítjuk össze:

$$k_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{\infty} X_i^2}{\sum_{i=1}^{\infty} X_i^2}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{\infty} X_i^2}{X_1^2}}, \quad (4-10)$$

ahol X_i az amplitúdó spektrum i -ik komponense.

Hivatkozások, felkészüléshez ajánlott irodalom

- [1] Dr. Fodor György: *Hálózatok és rendszerek*, 55064, Műegyetemi Kiadó
Analízis a frekvenciatartományban: 233-263 oldal

Feladatok a felkészüléshez

A mérést megelőző otthoni felkészülésként végezze el az alábbiakat önállóan!

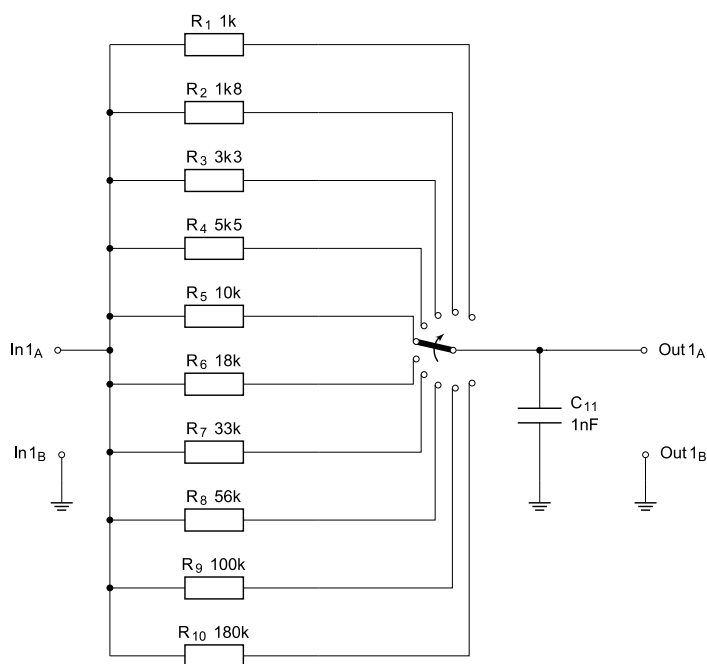
1. Olvassa át alaposan *A mérés elméleti alapjai* c. szakaszban foglaltakat, valamint az [1] irodalom megadott részeit!
2. Olvassa el és gondolja végig a *Mérési feladatokat*!
3. A 4.2 méréshez otthon számítsa ki szimmetrikus háromszög és négyszögjel első 10 felharmonikusát, 1 V amplitúdót (*nem* peak-to-peak) feltételezve. A kiszámolt eredményeket 1 V effektív értékre vonatkoztatva, dB-ben adja meg! A kiszámított eredményeket el kell hozni a mérésre, ott fel kell használni.
4. Válaszolja meg a (mérési leírás végén található) *Ellenőrző kérdéseket*!

Alkalmazandó műszerek

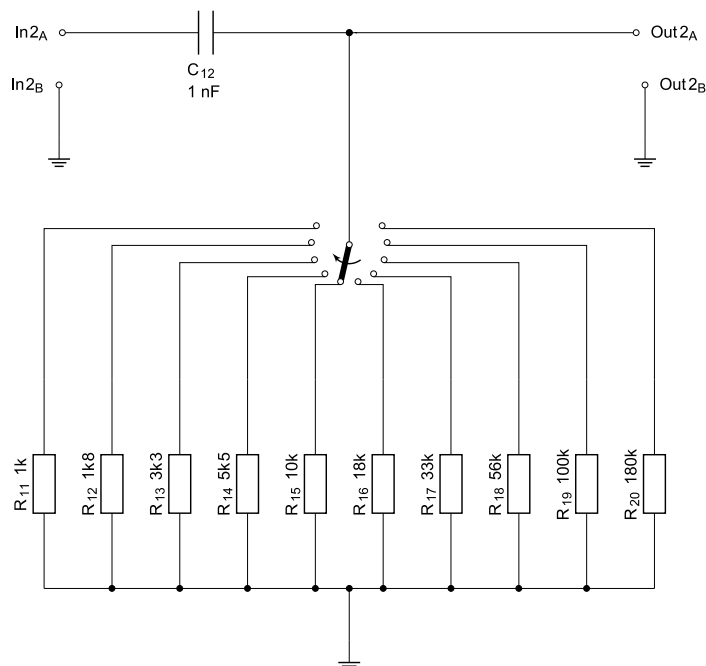
Digitális multiméter	Agilent 34401A
Tápegység	Agilent E3630
Függvénygenerátor	Agilent 33220A
Oscilloszkóp	Agilent 54622A

Tesztpanel

A mérendő objektumokat a VIK-05-01 jelű teszt panel tartalmazza.



4–8. ábra. Változtatható elsőfokú aluláteresztő szűrő kapcsolási rajza



4–9. ábra. Változtatható elsőfokú felüláteresztő szűrő kapcsolási rajza

Néhány jótanács

Oscilloszkóp sávszélessége

Mint minden műszernek, így az oszcilloszkópnak is van egy meghatározott bemeneti sávszélessége, amely frekvenciatartományon belül pontosnak tekinthető. A bemeneti fokozat DC csatolás esetén egy elsőfokú aluláteresztő szűrővel legtöbbször már jól modellezhető. A gépkönyvekben a sávszélesség alatt a szűrő törésponti frekvenciáját adják meg, ahol az amplitúdóátvitel 3 dB-lel kisebb lesz, azaz a mért amplitúdó az eredetinek kb. 70%-ára csökken. Ha a bemeneti jel hasznos komponenseinek akár csak egy része ezen a sávon kívül esik, akkor a bemenetre adott és a valóságban a műszer jelfeldolgozó egysége által látott jel eltérő lesz. A hiba természetesen mind az idő-, mind a frekvenciatartományban jelentkezik, hiszen (FFT analízátor funkcióval felszerelt digitális oszcilloszkópot feltételezve) az FFT alapja a bemeneti fokozaton átjutott mintavételezett jel. Szinuszejel mérésekor a probléma viszonylag egyszerűen kezelhető, hiszen a szinuszejel spektruma egyetlen spektrumvonalat tartalmaz. Szélessávú jelek (négyyszögjel, háromszögjel) vizsgálatokkor előre meg kell becsülni azt a frekvenciatartományt, ahol a méréshez elengedhetetlen a megközelítőleg torzítatlan átvitel.

Dinamikatartomány

Frekvenciatartománybeli vizsgálatoknál a műszer kiválasztásánál talán a két legfontosabb paraméter a műszer sávszélessége és dinamika tartománya. A dinamikatartomány nem keverendő össze az A/D átalakító felbontásával (resolution): előbbi megadja a legnagyobb és legkisebb egyszerre megmérhető jel közötti különbséget, decibelben, míg az utóbbi a legkisebb ábrázolható lépésközt definiálja. A legkisebb mérhető jelet többnyire a zaj szintje

határozza meg (noise floor), ami egybeeshet az A/D átalakító felbontásából származó hibával, de az analóg zajforrások miatt ennél rosszabb is lehet, illetve átlagolási technikák használatával az A/D felbontásánál pontosabban is mérhetünk. A dinamikatartomány átlagos műszernél általában 50-60 dB körüli, egy jobb minőségű spektrumanalizátor dinamikatartománya 90 dB is lehet (ez kb. 15 bites felbontásnak feleltethető meg).

Mintavételi frekvencia

Digitális rendszerekben a mintavételi frekvencia megválasztása sokszor kulcskérdés frekvenciatartománybeli mérések esetén. Először is két dolgot kell különválasztani: az időtartománybeli és a frekvenciatartománybeli mérések esetén eltérőek a követelmények a mintavételi frekvenciával szemben. A frekvenciatartománybeli mérésekhez elegendő a mintavételi tétel betartása, ezzel a jelről minden információt megkapunk. A mintavételi tételt szinuszjel esetén periódusonként néhány, pl. 4-5 mintával már bőven betartottuk, így elvileg mindent tudunk a jelről. Az időtartománybeli analízishez azonban ez nem elegendő. A szemünk ugyanis nem tudja a szinuszjelet a periódusonként néhány mintából interpolálni. Az időtartománybeli vizsgálatokhoz minél nagyobb mintavételi frekvencia megválasztása célszerű, hogy minden apró változást észrevegyünk a jelben (az időbeli felbontást maximalizáljuk). Ezzel szemben a frekvenciatartományban a frekvenciában történő felbontást célszerű növelni, amíg csak lehet. FFT-analizátorban gondolkodva két szomszédos frekvenciapont távolsága az FFT mérettől és a mintavételi frekvenciától függ ($\Delta f = f_s / N$). A mintavételi frekvencia növelésével a felbontás csökkenni fog, hiszen egyre távolabb kerülnek a frekvenciapontok egymástól. A jó stratégia az, ha a mintavételi frekvenciát addig csökkentjük, amíg csak lehet (még épp ne legyen átlapolódás), illetve az FFT méretét a lehető legnagyobbra választjuk. Megjegyezzük, hogy a laborban használt oszcilloszkóp fix méretű FFT-vel dolgozik ($N=2048$), így csak a mintavételi frekvenciát tudjuk változtatni (az időalap változtatásával).

Ellenőrző kérdések

1. Hogyan határozható meg a DFT felbontása a mintavételi frekvencia és a mintaszám alapján?
2. Milyen a szinusz és a szimmetrikus négyszögjel spektruma, hol találhatók frekvenciakomponensek, és mit mondhatunk az amplitúdójukról?
3. Mi történik a szinuszjel spektrumképével, ha a spektrumanalizátor bemenetét túlvezéreljük?
4. Hogyan néz ki egy olyan periodikus jel DFT-je, amit a jel pontosan tíz periódusából számolunk?
5. Mit jelent, hogy egy periodikus jelet koherensen, ill. nem-koherensen mintavételezünk?
6. Szinuszjel mérése esetén milyen nemkívánatos hatásai vannak a nem-koherens mintavételezésnek és hogyan tudjuk ezt enyhíteni?
7. Koherens mintavételezés esetén milyen ablakfüggvényt érdemes alkalmazni?
8. Mi a Flat top ablak alkalmazásának előnye és hátránya?
9. Hogyan határozható meg a vizsgált szinuszjel amplitúdója és effektív értéke a számolt komplex Fourier-sor együtthatói alapján?
10. Milyen gerjesztőjelek alkalmazásával tudjuk egy rendszer átviteli függvényét egyszerre több különböző frekvencián megmérni?