

DIGITÁLIS TECHNIKA GYAKORLÓ FELADATOK 1.

Megoldások

I. A kódoláselmélet alapjai

1. Adja meg az alábbi számokat 12 bites

előjeles abszolútértékes,
 egyes komplementes,
 kettes komplementes,
 offset kódú bináris számábrázolásban!
 35, -35, 278, -278, 0, -2047, 2047, ...

Megoldás:

	előjeles absz.	egyes komplementes	kettes komplementes	offset kódú bináris
35:	0000.0010.0011	0000.0010.0011	0000.0010.0011	1000.0010.0011
-35:	1000.0010.0011	1111.1101.1100	1111.1101.1101	0111.1101.1101
278:	0001.0001.0110	0001.0001.0110	0001.0001.0110	1001.0001.0110
-278:	1001.0001.0110	1110.1110.1001	1110.1001.1010	0110.1001.1010
0:	0000.0000.0000	0000.0000.0000	0000.0000.0000	1000.0000.0000
2047:	0111.1111.1111	0111.1111.1111	0111.1111.1111	1111.1111.1111
-2047:	1111.1111.1111	1000.0000.0000	1000.0000.0001	0000.0000.0001

2. Hasonlítsa össze a tanult számábrázolási módszereket abból a szempontból, hogy milyen matematikai művelet végzésére a legalkalmasabbak, ill. a legalkalmatlanabbak!

Megoldás:

	+	-	*	%	komp.
Előjeles absz.értékes:	r	r	k	j	
Egyes komplementes:	j	j	g	g	g
Kettes komplementes:	k	j	g	g	g
Offset:	g	g	g	g	k

k: kiváló, j: jó, g: gyenge, r: rossz

3. Fogalmazza meg a tanult számábrázolási módszereknél

a -1-gyel való szorzás,
a 2-vel való osztás és
két szám összeadásának algoritmusát!

Megoldás:

Példaképpen a 2-es komplementes ábrázolásnál adjuk meg a megoldást:

- a/ 2-es komplementesképzés (bitenkénti negálás +1 LSB);
- b/ Jobbra tolás egy bittel, az előjelbit megtartja értékét;
- c/ A bináris összeadás szabályai szerint összeadjuk a két n bites kódot n biten. Ha az összeadandók előjele egyforma volt és az eredményé ettől különbözik, akkor túlsordulás volt (az eredmény érvénytelen), egyébként 2-es komplementesben helyesen adódik.

4. Fogalmazza meg az NBCD kódolt (a decimális számjegyek 8-4-2-1 súlyozású bináris kódolása) számok összeadási szabályát!

Megoldás:

Összeadjuk a két négybites bináris számot.

- ◆ Ha az eredmény kisebb 10-nél (binárisan 1010-nál), akkor ez az eredmény,
- ◆ Ha az eredmény nagyobb-egyenlő 10-nél, akkor 6-ot (binárisan 0110-t) még hozzáadunk. Ez az összeg lesz az adott helyiértéken az eredmény és lesz egy átvitel.

5. Bizonyítsa be, hogy

n lépésű egyirányú mozgás kódolható pozíciókóddal (a szomszédos pozíciók kódja 1 Hamming távolságú),
 $2n$ lépésű körmozgás is kódolható pozíciókóddal!

Megoldás:

Gray kódot tudunk csinálni n -nél nagyobb-egyenlő kettő kerek hatványra. Ennek a Gray kódnak tetszőleges n hosszú részlete megfelel lineáris pozíciókódnak.

Az előző n hosszú lineáris pozíciókódot a Gray kódnál megismert tükrözési módszerrel és egy további megkülönböztető bittel kiegészítve, $2n$ hosszúságú ciklikus pozíciókódot kapunk.

6. Egy cinkelt dobókockával való 1-6 dobások gyakorisága rendre:

0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1, 0.3.

Kódolja tömören a kockadobások eredményét és számítsa ki az átlagos kódszó hosszát!

Hány - különböző hosszúság-eloszlású - optimális kódot talál? (Egy kódkészlet hosszúságeloszlása azt adja meg, hogy hány 1, 2, 3 stb. hosszúságú kódszó van benne.)

Megoldás:

Több különböző hosszúság-eloszlású optimális kód is van (mi kettőt találtunk), pl.

0.3	00	00
0.2	10	010
0.2	11	10
0.1	010	011
0.1	0110	110
0.1	0111	111

Mindkét kód prefix, az átlagos kódszóhossz: 2.5 bit.

7. Hogyan kódolna ezer bites adatokat minél tömörebben, ha az adatokban az egyesek előfordulási gyakorisága kicsi: 0,01? Számítsa ki, hogy az ezer bitet mennyire sikerült tömöríteni!

Megoldás:

Pl. tíz biten kódolnám, hogy a sok nulla között hanyadik lesz a következő első egyes. Ezt ezer bitenként újra kezdeném, illetve ha az adott ezer bites csomagban már nincs egyes, akkor egy jó nagy számot küldök, hogy a dekódoló ésszrevegye, hogy kész az adott csomag.

Ez egy egész jó kódolási módszer (már mások is kitalálták és futamkódolásnak nevezik), a hatékonyságának kiszámítása azonban nem triviális.

Egy becslés: várhatóan 10 egyes lesz a csomagban, ez 11 köz, tehát 11-szer kell 10 bites $\blacklozenge$ távolságot $\blacklozenge$ kiadni. Ez összesen várhatóan 110 bit a kiinduló 1000 bit helyett, ami nem rossz, de van jobb is! Ezen kívül el kell viselnünk, hogy ez a 110 bit hol hosszabb, hol viszont rövidebb!

8. Keressen tömör kódot, ha az egyes események gyakorisága:

a./ $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, $1/32$, $1/32$.

b./ $1/4$, $1/4$, $1/8$, $1/8$, $1/8$, $1/16$, $1/16$.

c./ 10 db. 0.1.

Minden esetben számítsa ki az átlagos kódszóhosszat is!

Megoldás:

Pl. optimális prefix kódok rendre:

a/ 0, 10, 110, 1110, 11110, 11111	átlag: 31/16
b/ 00, 01, 100, 101, 110, 1110, 1111	átlag: 21/8
c/ 000, 001, 010, 011, 100, 101, 1100, 1101, 1110, 1111	átlag: 3.4

9. A furfangos hallgató jól meg akarja védeni nyolcbites adatait, ezért a következő redundáns kódot találja ki:

A nyolc bit után írja

- a./ egy biten a kiinduló adat paritását,
- b./ egy biten a kiinduló adat első négy bitjének paritását,
- c./ egy biten a második négy bit paritását,
- d./ egy biten a páros pozíciójú bitek paritását és
- e./ egy biten a páratlan pozíciójú bitek paritását.
- f./ Ezzel még nem elégszik meg, biztonság kedvéért az egész végére írja még a kiinduló adat 1-es komplementjét.

Így összesen 21 bites redundáns kódkészletet kap. Mekkora ennek a Hamming távolsága?

Megoldás:

Ha a kiinduló kódszóban 1 bitet változtatunk meg, akkor ez a/-ban 1, b/ vagy c/-ben 1, d/ vagy e/-ben 1 és f-ben újabb egy bit eltérést okoz, tehát összesen 5 a Hamming távolság.

Ha a kiinduló adatban ügyesen rontunk el két bitet (pl. az 1. és a 3. bitet invertáljuk), akkor a/-e/ ellenőrző bitek nem változnak. Így a kiinduló kódrész és az f/ együttesen 4 bitben fognak eltérni. Ennél kevesebbet már semmilyen módon nem lehet produkálni, ezért a furfangos kód Hamming távolsága 4.

10. Hármas minimális Hamming távolságú kódkészletet kell szerkeszteni hatbites kódszavakkal. Hány kódszót talál?

Megoldás:

Nyolcat könnyen találunk, ha az előadáson megismert (7,4) Hamming kódban az egyik információs bitet a négy közül állandóan 0-nak vesszük és el is hagyjuk. A további három információs bitből nyolc kódszónak kiadódik a három bites ellenőrző része.

A rejtvény tovább folytatódik annak bizonyításával, hogy több kódszót már nem lehet találni. Ezt a bizonyítást egyelőre az olvasóra bízom!

11. Mennyi a Hamming távolsága annak a decimális kódnak, amelynek kilenc információs jegyéhez az r redundáns karaktert illesztjük:

$$r = \text{mod}_{10} (1.a_1 + 2.a_2 + 3.a_3 + 4.a_4 + 5.a_5 + 6.a_6 + 7.a_7 + 8.a_8 + 9.a_9) \quad ?$$

(. = szorzás)

Megoldás:

Sajnos csak 1, tehát a $\blacklozenge$ legrosszabb $\blacklozenge$ esetet tekintve semmire sem jó! Ugyanis ha a_2 -ben 5-öt, vagy a_5 -ben 2-t tévedünk, akkor az ellenőrző karakter változatlan marad.

12. Mekkora Hamming távolságú kódszókészlet kell

- a./ 4 eltörlődéses hiba jelzéséhez?
- b./ 4 eltörlődéses hiba javításához?
- c./ 4 (átállítódásos) hiba jelzéséhez?
- d./ 4 (átállítódásos) hiba javításához?

Megoldás:

- a/ 4 eltörlődéses hiba jelzéséhez min. 1(!)
- b/ 4 eltörlődéses hiba javításához min. 5,
- c/ 4 (átállítódásos) hiba jelzéséhez min. 5,
- d/ 4 (átállítódásos) hiba javításához min. 9.

13. Mekkora Hamming távolságú kódszókészlet kell 6 hiba javításához?

Ez a kódszókészlet milyen további javítás/jelzés variációkban használható még fel?

Megoldás:

Mivel külön nincs megadva, itt átállítódásos hibát kell feltételeznünk! Hat hiba javításához min 13-as Hamming távolság kell.

Ez a kód alkalmas még:

- 5 hiba javítására és még a 6. és 7. jelzésére,
- 4 hiba javítására és még az 5.-8. jelzésére,

3 hiba javítására és még a 4.-9. jelzésére,
2 hiba javítására és még a 3.-10. jelzésére,
1 hiba javítására és még a 2.-11. jelzésére.

14. A paritáskód és az üzenetismétlés egyaránt kettes Hamming távolságú kód. Mégis mennyivel erősebb a jóval hosszabb üzenetismétlés?

Megoldás:

Az üzenetismétléses kód kettes Hamming távolsága csak akkor áll elő, ha mindkét kódrészben pontosan ugyanaz a bit romlik el. Ekkor ezt átállítódásos hibánál nem lehet jelezni ill. eltörlődéses hibánál nem lehet javítani.

Ha a két kódrészben eltérő bitek  akár többen is -- romlanak el, akkor viszont bárhány átállítódásos hibát lehet jelezni ill. eltörlődésest lehet javítani.

A paritás kódnál ez nem áll fenn!

15. Négybites információhoz tizenegy redundáns bitet írunk úgy, hogy a kiinduló négy bitből minden lehetséges módon kiválasztunk kettőt, hármat és négyet (ez összesen $4+6+1=11$ eset) és rendre leírjuk ezen "bitsoportok" paritását. Mekkora a Hamming távolsága az így kapott 15 bites kódszókészletnek?

Megoldás:

Azt kell észrevenni, hogyha a négybites kódszóban elrontjuk bármelyik 1, 2, 3, 4 bitet, akkor a tizenegy bites redundáns részben rendre 7, 6, 5, 4 bit fog megváltozni. Az információ és a redundáns részben összesen megváltozó bitek minden esetben 8-at adnak, így a kódszókészlet Hamming távolsága 8.

Részletesen:

1 bit elrontásakor a kétbites paritások közül	3 változik meg,
a hárombites paritások közül	3 változik meg,
a négybites paritások közül	1 változik meg,
Összesen a redundáns részben	7 változik meg.
2 bit elrontásakor a kétbites paritások közül	4 változik meg,
a hárombites paritások közül	2 változik meg,
a négybites paritások közül	0 változik meg,
Összesen a redundáns részben	6 változik meg.
3 bit elrontásakor a kétbites paritások közül	3 változik meg,
a hárombites paritások közül	1 változik meg,
a négybites paritások közül	1 változik meg,

Összesen a redundáns részben 5 változik meg.
 4 bit elrontásakor a kétbites paritások közül 0 változik meg,
 a hárombites paritások közül 4 változik meg,
 a négybites paritások közül 0 változik meg,
 Összesen a redundáns részben 4 változik meg.

16. Hatbites információhoz 15 redundáns bitet írunk úgy, hogy a kiinduló hat bitből minden lehetséges módon kiválasztunk kettőt és rendre leírjuk ezen bit-kettősök paritását. Mekkora Hamming távolsága lesz az így kapott 21 bites kódkészletnek? Hány átállítódásos hiba jelzésére/javítására alkalmas?

Megoldás:

Azt kell észrevenni, hogyha a hatbites kódszóban elrontjuk bármelyik 1, 2, 3, 4, 5, 6 bitet, akkor a tizenöt bites redundáns részben rendre 5, 8, 9, 8, 5, 0 bit fog megváltozni. Az információs és a redundáns részben összesen megváltozó bitek rendre 6, 10, 12, 12, 10, 6 értéket adnak, ezek közül a minimális 6 a kódkészlet Hamming távolsága.

Részletesen:

Ha az információs részben k számú bitet megváltoztatunk, akkor az ellenőrző bitek közül pontosan azok fognak megváltozni, amelyek egy megváltozott és egy változatlan bitből képzett ellenőrző jegyek. Ezek száma pedig $k \cdot (6-k)$, vagyis $1 \cdot 5, 2 \cdot 4, 3 \cdot 3, 4 \cdot 2, 5 \cdot 1, 6 \cdot 0$, amint azt előbb írtuk.

II. Logikai függvények

17. Egy gyilkosság nyomozása során az következő információk gyűlteks össze:

A gyilkosról kizárható, hogy

1. kék szemű ÉS sportos;
2. fekete hajú ÉS alacsony ÉS NEM kékszemű;
3. NEM fekete hajú ÉS NEM alacsony ÉS sportos;
4. NEM fekete hajú ÉS sportos és NEM kékszemű ÉS alacsony;
5. NEM fekete hajú ÉS NEM sportos ÉS NEM visel tornacipőt;
6. tornacipőt visel ÉS NEM sportos;
7. fekete hajú ÉS NEM alacsony.

Végül is a rendőrség előzetes letartóztatásba helyezett három gyanúsítottat, akik közül az egyik

- feketehajú, kékszemű, alacsony és kövér állásnélküli nyomdász, a másik
- feketehajú, kékszemű, magas, sportos tenisztréner, a harmadik
- feketehajú, szürkeszemű, alacsony beteges kinézetű varrónő volt.

Mi a véleménye, szükség volt-e a három letartóztatásra?

Megoldás:

Az első gyanúsítottat egyetlen állítás sem zárja ki,
a másodikat kizárja az 1. 7.,
a harmadikat pedig kizárja a 2. állítás.
Tehát az első gyanúsítottat elég letartóztatni.

Formális megoldás:

A lényeges tulajdonságok jelölései:

K  kékszemű
S  sportos
F  fekete hajú
M  magas
T  tornacipőt visel

Az egyes kizáró állítások:

1. K.S
2. /K.F./M
3. S./F.M
4. /K.S./F./M
5. /S./F./T
6. K./S.T
7. F.M

A gyanúsítottak jellemzői:

- I. K./S.F./M
- II. K.F.M
- III. /K.F./M

Ahol az állításnak és a gyanúsított jellemzőnek van közös része (ÉS kapcsolatuk nem 0), ott az állítás kizárja a gyanúsítottat.

18. Egy háromgyerekes család elment nyaralni a tengerpartra. Nagyon szerették a vizet, így esténként gyakran lementek úszni. Emellett még azt is tudjuk, hogy

- a./ az apa nem szeretett egyedül úszni, így csak akkor ment el, ha a felesége és a fiúk is vele ment.
- b./ A kisebbik lány mindig elkísérte a bátyját,
- c./ nővére pedig mindig akkor ment úszni, amikor a mamája.
- d./ A gyerekek még nem voltak elég nagyok ahhoz, hogy egyedül elengedjék őket, ezért legalább az egyik szülő mindig elkísérte őket.

Elmesélték, hogy az utolsó vasárnap este a két lány közül csak az egyik úszott. Kik mentek el úszás helyett még utoljára a városba sétálni?

Megoldás:

Okoskodással könnyen megkapjuk, hogy a kérdéses időpontban a mama és a nagyobbik lány ment úszni, csak a többiek mehetek a városba (hogy mind el is mentek-e, az a feladatból nem derül ki).

Ugyanez Boole algebrával:

Jelölje A , hogy az apa úszott a tengerben; M , hogy a mama úszott a tengerben; F , hogy a fiú úszott a tengerben; K , hogy a kisebbik lány úszott a tengerben; és N , hogy a nagyobbik lány úszott a tengerben! Ekkor a feladat állítási a következő egyenletekkel írhatók fel:

$$M.F + /A = 1$$

$$K + /F = 1$$

$$M.N + /M./N = 1$$

$$A + M + /N./K./F = 1$$

$$/N.K + N./K = 1$$

A fenti öt egyenlet mindegyike egyszerre igaz, vagyis szorzatuk egyet ad. Ekvivalens átalakítások után azt kapjuk, hogy

$$/A.M.N./K./F = 1.$$

19. Egy négyzet minden két csúcsa közé kapcsolót teszünk (a csúcsok rendre 1,2,3,4 jelűek és a megfelelő kapcsolók: K_{12} , K_{13} , K_{14} , K_{23} , K_{24} , K_{34} ; $K_{ij} = 1$, ha a kapcsoló vezető állásban van).

Írja fel

a/ két szomszédos csúcs közötti rövidzár logikai egyenletét: pl. $R_{12}=f(K_{12}, K_{13}, K_{14},$

K23, K24, K34), ill.

b/ az összes csúcs közötti rövidzár logikai egyenletét!

Megoldás:

a/ A négy lehetséges út egyenletét felírva pl.:

$$R_{12} = K_{12} + K_{13}.K_{23} + K_{14}.K_{24} + K_{13}.K_{24}.K_{34} + K_{14}.K_{34}.K_{23}$$

b/ Nyilván jó megoldás pl. az R_{12} , R_{13} , R_{14} logikai egyenleteinek összeszorozása is, de ez meglehetősen ronda.

Belátható, hogy az összes csúcs közötti rövidzár szükséges és elégséges feltétele az, hogy legalább három olyan kapcsoló be legyen kapcsolva, ami nem három csúcsot köt össze. Így pl. jó: $K_{12}.K_{13}.K_{14}$, $K_{12}.K_{23}.K_{24}$, de nem jó pl. $K_{12}.K_{23}.K_{13}$

Ez $2^3 - 4 = 8 - 4 = 4$ ilyen $\diamond$ három kapcsolós $\diamond$ term.

$$F = K_{12}.K_{13}.K_{14} + \dots$$

20. Milyen helyettesítési érték-variációk esetén áll fenn egyidejűleg az alábbi egyenlőséglánc:

$$A \bmod 2 \ B \bmod 2 \ C = /A.B + /B.C + /C.A = /A (/B + /C);$$

Megoldás:

$$A=0, B=0, C=1.$$

$$A=0, B=1, C=0.$$

Legegyszerűbb felrajzolni mindhárom függvény Karnaugh tábláját és cellánként egyezést keresni.

21. Bizonyítsa be, hogy ha $/A.B + C./D = 0$, akkor

$$A.B + /C.(/A + /D) = A.B + B.D + /B./D + /A./C.D$$

(Példatár L.f.14.)

22. Milyen helyettesítési értékek mellett áll fenn az alábbi egyenlőség (négy példa!)?

$$a./ A.B.C = A+B+C \quad b./ A.B.C = /A+/B+/C$$

$$c./ /(A.B.C) = A+B+C \quad d./ (A.B) \bmod 2 \ C = B$$

Megoldás:

$$a./ ABC = 000 \text{ vagy } 111;$$

$$b./ \text{soha};$$

$$c./ A \text{ két } A=B=C \text{ esetet kivéve a többi hat lehetőség};$$

$$d./ ABC = 000, 100, 011, 110$$

23. Igazolja az alábbi azonosságokat a Boole algebra axiomáihoz visszanyúlva!

$$a./ A + /A.B = A + B$$

$$b./ A.B + /A.C + B.C = A.B + /A.C$$

$$c./ A.B + /A.C = (A + C).(/A + B)$$

(Példatár L.f.11.)

24. Hozza egyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket, felhasználva a Boole algebra közismert tulajdonságait!

$$Y1 = /A + A.B./C + (/A + A.B./C).(A + /A./B.C);$$

$$Y2 = /((A.B + C.D).(A./C + B./D));$$

$$Y3 = B.(A.C + /A./C) + A./C + /A.C;$$

$$Y4 = A.C.D + A.B.C + D.(/A + /B) + /A.C.D$$

(Példatár L.f.12.)

25. A kétértékű logika $\diamond$ majdnem teljes $\diamond$ függvényosztályai közül melyekbe tartoznak az alábbi függvények?

Írja fel minden esetben az igazságtáblát is!

$$0;$$

$$/x;$$

$$/x+y;$$

$$/(/(a.b).c);$$

$$a \bmod 2 (a.b) \bmod 2 (a.b.c)$$

Megoldás:

	T0	T1	M	S	L
0	x	-	x	-	x
/x	-	-	-	x	x
/x+y	-	x	-	-	-

$/((a.b).c)$	-	-	-	-	-
$a \text{ mod } 2 \ (a.b) \text{ mod } 2 \ (a.b.c)$	x	x	-	-	-

26. Mondjon olyan Boole függvényeket, amelyek csak egyetlen majdnem teljes függvényosztályhoz tartoznak!

(Példatár L.f.06.)

27. Milyen zárt osztályokat feszítenek ki az alábbi Boole függvények?

- a./ $a+/b$
- b./ $(a+/b).c$
- c./ $a+/b; a.b;$
- d./ $a+/b; 0;$

Megoldás:

- a/** $a+/b$ valódi része T1-nek
- b/** $(a+/b).c$ valódi része T0 metszet T1-nek
- c/** $a+/b; a.b; T1$
- d/** $a+/b; 0;$ P2 (összes Boole fv.)

Mert:

a/ $a+/b$ csak T1 eleme, ezért $[a+/b]$ T1 részhalmaza. Mivel azonban $a+/b$ ismételt alkalmazásával csak olyan függvényeket kaphatunk, amiből egy változó (ponált formában) kiemelhető (az $a./b$ kapukból felépített kombinációs hálózatban mindig van út elsődleges bemenettől csupa ponált lábon keresztül a kimenetig!), ezek a függvények pedig legfeljebb fele maxtermnél lehetnek 1 értékűek. De nem minden T1-beli függvény ilyen!

b/ Az adott függvény T0-nak és T1-nek is eleme, így lezártja T0 metszet T1 részhalmaza. Hasonlóan az előző gondolkodáshoz, most azt lehet belátni, hogy az előállított függvényekben legalább fele 1-es lesz!

c/ Lezártja T1, mert e két függvényből $a+b$ is felépíthető:

$$a+b = a+((a+/b) \cdot (/a+b)),$$

ezzel és $a+/b$ -vel $M_{\max}$ -ot kivéve minden maxterm megcsinálható, a szükséges maxtermek ÉS kapcsolata pedig az $a.b$ függvényel állítható elő.

d/ Az adott két függvényből könnyen meg tudjuk konstruálni a NAND függvényt!

28. Keressen függvényt, amely:

- a./ nullát megőrző, egyet megőrző, és lineáris;
- b./ nullát megőrző, nem egyet megőrző, monoton;
- c./ lineáris és önduális, de nem nullát megőrző!

Megoldás:

Ilyen függvények léteznek és ezért "sokat" lehet találni, mi itt érdekességként a legkevesebb változós számú példákat adjuk meg:

- a/ ilyen a páratlan számú változó mod2-je. pl.: $a \bmod 2$ $b \bmod 2$ c ;
- b/ az azonosan 0 függvény;
- c/ /a.

29. Excess 3 kódú decimális számjegyet vissza kell kódolni NBCD kódba. Ez négy bemenetű, négy kimenetű logikai függvényt jelent. Adja meg a függvényt!

Megoldás:

Ha az Excess 3 kód bitjei rendre az MSB-től haladva $dcba$, az NBCD kódé pedig $DCBA$, akkor

$$\begin{aligned} D &= d \cdot (c + b \cdot a) \\ C &= c \bmod 2 \cdot (a \cdot b) \\ B &= b \bmod 2 \cdot a \\ A &= a \end{aligned}$$

Ezek felismeréséhez jó szem kell!