6. Szűréselmélet alapjai (folyt.):

Kalman szűrő vektoros esetben:
A rendszermodell: $x(n) = Ax(n-1) + w(n-1)$, a megfigyelés: $y(n) = Cx(n) + n(n)$. Mind a rendszer, mind a megfigyelési zaj vektor nulla várható értékű és fehér. Korreláció mátrixaik:

$Q(n) = E\{w(n)w^T(n)\}$ (ez lép σ_w^2 helyébe), $R(n) = E\{n(n)n^T(n)\}$, (ez lép σ_n^2 helyébe). Az optimális rekurzív szűrő

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{x}(n) = A\hat{x}(n-1) + K(n)(y(n) - CA\hat{x}(n-1))\\&K(n) = P_1(n)C^T[CP_1(n)C^T + R(n)]^{-1}, \quad ahol\\&P_1(n) = AP(n-1)A^T + Q(n-1)\\&P(n) = P_1(n) - K(n)CP_1(n) = (I - K(n)C)P_1(n)\\&P_1(n+1) = A(I - K(n)C)P_1(n)A^T + Q(n)\end{aligned}} \tag{165}$$

Itt $K(n)$ a Kalman erősítés, $P(n)$ a hiba kovariancia mátrixa, $P_1(n)$ pedig segédmátrix a számítások egyszerűsítése céljából.

Kalman prediktor vektoros esetben:
A rendszermodell: $x(n+1) = Ax(n) + w(n)$, a megfigyelés: $y(n) = Cx(n) + n(n)$. Mind a rendszer, mind a megfigyelési zaj vektor nulla várható értékű és fehér. Korreláció mátrixaik:

$Q(n) = E\{w(n)w^T(n)\}$ (ez lép σ_w^2 helyébe), $R(n) = E\{n(n)n^T(n)\}$,

(ez lép σ_n^2 helyébe). Az optimális rekurzív prediktor:

$$\hat{x}(n+1) = A\hat{x}(n) + G(n)(y(n) - C\hat{x}(n)), \tag{166}$$

és keressük azt a $G(n)$ mátrixot, amely mellett a becslés

$$P(n+1) = E\{[x(n+1) - \hat{x}(n+1)][x(n+1) - \hat{x}(n+1)]^T\} = E\{e(n+1)e^T(n+1)\} \tag{167}$$

kovariancia mátrixa minimális. Képezzük (167) deriváltját $G(n)$ szerint. Az optimumot akkor kapjuk, ha ez a derivált nullával egyenlő:

$$\frac{\partial P(n+1)}{\partial G(n)} = -2E\{[x(n+1) - \hat{x}(n+1)][y(n) - C\hat{x}(n)]^T\} = 0\,. \tag{168}$$

Ha a (168) összefüggésbe behelyettesítjük a rendszermodell és a prediktor összefüggéseit, akkor:

$$\begin{aligned}E\{[Ax(n) + w(n) - A\hat{x}(n) - G(n)(Cx(n) + n(n) - C\hat{x}(n))][Cx(n) + n(n) - C\hat{x}(n)]^T\} =\\ = E\{[(A - G(n)C)e(n) + w(n) - G(n)n(n)][Ce(n) + n(n)]^T\} =\\ = [A - G(n)C]P(n)C^T - G(n)R(n) = 0\end{aligned} \tag{169}$$

A (169) összefüggés felírásakor felhasználtuk az alábbi előzetes ismereteinket:

$$E\{e(n)n^T(n)\} = E\{w(n)e^T(n)\} = E\{n(n)e^T(n)\} = E\{w(n)n^T(n)\} = 0 \tag{170}$$

A (169) összefüggésből a keresett prediktor erősítés:

$$G(n) = AP(n)C^T[CP(n)C^T + R(n)]^{-1}. \tag{171}$$

A becslés (167) szerinti kovariancia mátrixa:

$$P(n+1)=[(A-G(n)C)e(n)+w(n)-G(n)n(n)][(A-G(n)C)e(n)+w(n)-G(n)n(n)]^T =$$
$$=[A-G(n)C]P(n)[A-G(n)C]^T+Q(n)+G(n)R(n)G^T(n)\,. \qquad (172)$$

Megjegyzés: A (172) összefüggés alapján látható, hogy a becslés kovariancia mátrixa három hatás eredményeképpen alakul:

- A megfigyelő tárgyalásakor megismert hibacsökkentő hatás az $[A-G(n)C]$ kontraktivitásának következtében, de most – a kritériumnak betudható módon – négyzetes formában.
- A rendszerzaj kovariancia mátrixa által közvetített, statisztikai értelemben vett hibanövelő hatás, amely annak tudható be, hogy a $w(n)$ diszkrét érték „perturbálja" $x(n+1)$ – az előző állapot alapján – jósolt értékét.
- A megfigyelési zaj kovariancia mátrixa pedig ugyancsak hibát növel statisztikai értelemben, ami annak tudható be, hogy az $n(n)$ diszkrét érték „perturbálja" $\hat{x}(n+1)$ – az előző állapot alapján – jósolt értékét.

A (172) összefüggés írható kompaktabb formában, mert első tagját kifejtve:

$$P(n+1)=AP(n)A^T-AP(n)C^TG^T(n)-G(n)CP(n)A^T+G(n)CP(n)C^TG^T(n)+$$
$$+G(n)R(n)G^T(n)+Q(n). \qquad (173)$$

A negyedik és az ötödik tag összevonásával, és (171) felhasználásával:

$G(n)[CP(n)C^T+R(n)]G^T(n)=AP(n)C^TG(n)$, ami viszont kiejti (173) második tagját. Marad az első, harmadik és hatodik tag, amiből:

$$P(n+1)=[A-G(n)C]P(n)A^T+Q(n) \qquad (174)$$

Összefoglalva:
A rendszermodell: $x(n+1)=Ax(n)+w(n)$, a megfigyelés: $y(n)=Cx(n)+n(n)$. Az optimális rekurzív (ún. Kalman) prediktor:

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{x}(n+1)=A\hat{x}(n)+G(n)(y(n)-C\hat{x}(n))\\&G(n)=AP(n)C^T[CP(n)C^T+R(n)]^{-1}\\&P(n+1)=(A-G(n)C)P(n)A^T+Q(n)\end{aligned}} \qquad (175)$$

Mejegyzés: Az optimális rekurzív becslő használható modellillesztésre is. Az illesztett modell továbbra is az adaptív lineáris kombinátor. Ilyenkor, használva a korábbi jelöléseket, továbbá feltételezve, hogy $Q(n)$=0, a (175) összefüggés az alábbiak szerint alakul:

$$W(n+1)=W(n)+G(n)(y(n)-X^T(n)W(n))=W(n)+G(n)e(n) \qquad (176)$$
$$G(n)=P(n)X(n)[X^T(n)P(n)X(n)+R(n)]^{-1} \qquad (177)$$
$$P(n+1)=(I-G(n)X^T(n))P(n) \qquad (178)$$

ahol most $P(n)$ a paraméterbecslés „kovariancia" mátrixa: $P(n)=E\{V(n)V^T(n)\}$, $X(n)$ pedig a regressziós vektor. Érdemes visszalapozni a (108)-(121) összefüggésekhez.

Megjegyzés:
Érdemes összevetni a 2. ábrán látható megfigyelő modellt a 36. ábrán látható Kalman prediktorral.

1. Figyeljük meg, hogy a (172) összefüggés első tagja nagyon hasonlít az (5) összefüggéshez, az eltérés csupán a négyzetes jelleg. Értelemszerűen itt is igaz, hogy a

hiba csökkenéséhez a hibarendszer állapotátmenet mátrixának, az $F(n) = A - G(n)C$ mátrixnak kontraktívnak kell lennie.
2. Ha a zajfolyamatok stacionáriusak, akkor $Q(n)=Q$, $R(n)=R$.
3. Vegyük észre, hogy a megfigyelt rendszer modellje hogyan épül be a megfigyelőbe.

7. Modell-alapú jelfeldolgozás

A fejezet keretében modell-alapú jel-reprezentációs kérdésekkel foglalkozunk. Az alkalmazott megközelítés lényege, hogy a jeleket az őket generálni képes modellekkel reprezentáljuk, és ezeknek a modelleknek a feltételezésével megfigyelőket készítünk. A keresett jel jellemzők a megfigyelő jellemzőiből kiolvashatók.

7.1. Az alapok felidézése

Elöljáróban a digitális jelfeldolgozás legalapvetőbb módszereit tekintjük át. Ezek között kiemelt szerepet kapnak a rekurzív átlagolások.

- Egyszerű átlagolás (lásd 37. ábra):

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y(k) \Rightarrow \hat{x}(n+1) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} y(k) = \frac{n}{n+1}\hat{x}(n) + \frac{1}{n+1}y(n) = \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1}[y(n) - \hat{x}(n)] \tag{179}$$

Vegyük észre, hogy itt A=C=1, $G(n) = \frac{1}{n+1}$. $G(n) \to 0$, ha $n \to \infty$.

- Exponenciális átlagolás (lásd 38. ábra):

$$\hat{x}(n+1) = a\hat{x}(n) + by(n), \tag{180}$$

ahol a és b konstansok. A frekvenciatartománybeli viselkedés leírására használható a z-transzformáció: $z\hat{X}(z) = a\hat{X}(z) + bY(z)$, amiből kifejezhető az exponenciális átlagoló átviteli függvénye:

$$H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{b}{z-a} = \frac{bz^{-1}}{1-az^{-1}} \tag{181}$$

Ez egy alul-áteresztő szűrő, amely, ha konstans jelet kap, akkor a tranziens lejátszódása kimenetén ugyanez a konstans jelenik meg. Ehhez pedig az kell, hogy (181) ennek megfelelően legyen normálva, vagyis $H(z) = 1$, ha z=1. Ezzel (181) behelyettesítési értéke $\frac{b}{1-a} = 1$, vagyis $a = 1 - b$. Ezzel a (180) összefüggés

$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + b(y(n) - \hat{x}(n)). \tag{182}$$

Vegyük észre, hogy itt is A=C=1, továbbá G(n)=b. Ennek megfelelően ilyenkor a megfigyelt új értéket egy konstanssal szorozzuk, ellentétben a lineáris átlagolással.

Megjegyzés: A (182) összefüggés felhasználásával:

$$\begin{aligned} &\hat{x}(0) = 0,\ \hat{x}(1) = by(0), \\ &\hat{x}(2) = \hat{x}(1) + b(y(1) - \hat{x}(1)) = (1-b)by(0) + by(1), \\ &\hat{x}(3) = \hat{x}(2) + b(y(2) - \hat{x}(2)) = (1-b)^2 by(0) + (1-b)by(1) + by(2), \end{aligned} \tag{183}$$

A (183) összefüggés alapján, mivel $0 < b < 1$, a régebbi mintákat egyre kisebb súllyal vesszük figyelembe.

Megjegyzés: Az exponenciális átlagolás egy rögzített sávszélességű aluláteresztő szűrésnek felel meg. Hozzá képest az egyszerű átlagolás úgy illusztrálható, mint folyamatosan egyre kisebb sávszélességű aluláteresztő szűrő.

- Csúszó-ablakos (sliding window, moving average) átlagolás (lásd 39. ábra):

$$\hat{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=n-N}^{n-1} y(k) \Rightarrow \hat{x}(n+1)=\frac{1}{N}\sum_{k=n-N+1}^{n} y(k) = \hat{x}(n)+\frac{1}{N}[y(n)-y(n-N)] \qquad (184)$$

Itt is A=C=1, de a becsatolás módja más. Itt is tudjuk értelmezni az átlagoló átviteli függvényét, mert (184) z-transzformáltja: $z\hat{X}(z)=\hat{X}(z)+\frac{1}{N}(1-z^{-N})Y(z)$, amiből:

$$H(z)=\frac{\hat{X}(z)}{Y(z)}=\frac{z^{-1}}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \qquad (185)$$

Megjegyzés:

1. $1-z^{-N}$ osztható az $1-z^{-1}$ tényezővel, az eredmény: $1+z^{-1}+z^{-2}+...+z^{-(N-1)}$, ami azt fejezi ki, hogy N egymást követő mintát adjunk össze.
2. A $1-z^{-N}$ tényező gyökei az N-edik egységgyökök: $\sqrt[N]{1}=z$.

1. Példa: Egyszerű átlagolás, frekvenciatartománybeli viselkedés:

$\hat{x}(n+1)=\frac{y(n)+y(n-1)}{2}$, illetve a z-transzformációval: $z\hat{X}(z)=\frac{1+z^{-1}}{2}Y(z)$, ill. az átviteli függvény: $H(z)=z^{-1}\frac{1+z^{-1}}{2}$. $z=e^{j\omega T}$ helyettesítéssel:

$$H(e^{j\omega T})=e^{-j\omega T}\frac{1+e^{-j\omega T}}{2}=e^{-j\frac{3}{2}\omega T}\frac{e^{j\frac{\omega T}{2}}+e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2}=e^{-j\frac{3}{2}\omega T}\cos\frac{\omega T}{2}\ . \qquad (186)$$

Ebből az amplitúdó-karakterisztika: $\left|H(e^{j\omega T})\right|=\left|\cos\frac{\omega T}{2}\right|$, a fázis-karakterisztika: $\varphi(\omega)=-\frac{3}{2}\omega T$, az $\omega T=k\pi$ helyen, ahol $k=\pm1,\pm3,...$ π fázisugrással (az előjelváltás miatt). Lásd 40. ábra.

2. Példa: Egyszerű differenciálás, frekvenciatartománybeli viselkedés:

$\hat{x}(n+1)=\frac{y(n)-y(n-1)}{2}$, illetve a z-transzformációval: $z\hat{X}(z)=\frac{1-z^{-1}}{2}Y(z)$, ill. az átviteli függvény: $H(z)=z^{-1}\frac{1+z^{-1}}{2}$. $z=e^{j\omega T}$ helyettesítéssel:

$$H(e^{j\omega T})=e^{-j\omega T}\frac{1-e^{-j\omega T}}{2}=je^{-j\frac{3}{2}\omega T}\frac{e^{j\frac{\omega T}{2}}-e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2j}=je^{-j\frac{3}{2}\omega T}\sin\frac{\omega T}{2}\ . \qquad (187)$$

Ebből az amplitúdó-karakterisztika: $\left|H(e^{j\omega T})\right|=\left|\sin\frac{\omega T}{2}\right|$, a fázis-karakterisztika: $\varphi(\omega)=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\omega T$, az $\omega T=k2\pi$ helyen, (ahol $k=0,\pm1,\pm2,...$) π fázisugrással (az előjelváltás miatt). Lásd 41. ábra. (Vedd észre, hogy a fáziskarakterisztika hibás, mert a fázisugrás nem π-nél van!)

3. Példa: Csúszó-ablakos átlagolás, frekvenciatartománybeli viselkedés:

A (185) összefüggés szerint az átviteli függvény: $H(z)=\dfrac{\hat{X}(z)}{Y(z)}=\dfrac{z^{-1}}{N}\dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$. $z=e^{j\omega T}$ helyettesítéssel:

$$H(e^{j\omega T})=\frac{e^{-j\omega T}}{N}\frac{1-e^{-jN\omega T}}{1-e^{-j\omega T}}=\frac{e^{-j\frac{N-1}{2}\omega T}}{N}\frac{e^{j\frac{N\omega T}{2}}-e^{-j\frac{N\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}}-e^{-j\frac{\omega T}{2}}}=\frac{e^{-j\frac{N-1}{2}\omega T}}{N}\frac{\sin\frac{N\omega T}{2}}{\sin\frac{\omega T}{2}}. \tag{188}$$

Ebből az amplitúdó-karakterisztika: $\left|H(e^{j\omega T})\right|=\dfrac{1}{N}\left|\dfrac{\sin\frac{N\omega T}{2}}{\sin\frac{\omega T}{2}}\right|$ (lásd 42. ábra), a fázis-karakterisztika: $\varphi(\omega)=-\dfrac{N-1}{2}\omega T$, az $\boldsymbol{\omega T = k\dfrac{2\pi}{N}}$ helyen, (ahol $k=\pm1,\pm2,\ldots$) π fázisugrással (az előjelváltás miatt), kivéve azokat a helyeket, ahol $\sin\dfrac{\omega T}{2}$ is előjelet vált.

7.2. Jelek reprezentációja jelterekben

Jelterek: az euklideszi tér általánosításai

- általánosított távolság > metrikus tér
- algebrai alapműveletek + linearitás > lineáris tér
- norma (kapcsolat a metrikával) > normált lineáris tér
- skalár v. belső szorzat > $(a,b)=a^Tb=b^Ta$.

Lineáris vektortér: bázisvektorok: $\varphi_m, m=0,1,\ldots,N-1$. Ezekkel az x vektor reprezentációja:

$$\boxed{x=\sum_{m=0}^{N-1}\alpha_m\varphi_m}, \tag{189}$$

ahol $\{\alpha_m\}$, m=0,1,…,N-1, a báziselemekből készített lineáris kombináció súlytényezője. Meghatározása:

$$(x,\varphi_n)=\sum_{m=0}^{N-1}\alpha_m(\varphi_m,\varphi_n),\ n=0,1,\ldots,N-1 \tag{190}$$

egyenletrendszer megoldásával.

Hasznos az ún. reciprok bázis alkalmazása: θ_m, m=0,1,…,N-1; $(\varphi_m,\theta_n)=\delta_{mn}$, ahol

$$\delta_{mn}=\begin{cases}1, & ha\quad m=n\\ 0 & egyébként\end{cases}.$$

Ezzel:

$(x,\theta_n)=\sum_{m=0}^{N-1}\alpha_m(\varphi_m,\theta_n)$, vagyis $\alpha_m=(x,\theta_m)$, amivel

$$\boxed{x=\sum_{m=0}^{N-1}(x,\theta_m)\varphi_m=\sum_{m=0}^{N-1}(x,\varphi_m)\theta_m}. \tag{191}$$

A bázis ortonormált, ha $(\varphi_m,\varphi_n)=\delta_{mn}$, amivel $x=\sum_{m=0}^{N-1}(x,\varphi_m)\varphi_m$.

Megjegyzés: $\varphi_m=[\varphi_m(0),\varphi_m(1),\ldots,\varphi_m(N-1)]^T$, ahol a zárójelben megadott indexek értelmezhetők diszkrét időindexként.

Lineáris tér: a bázisok folytonos függvények, azaz $\varphi_m\to\varphi_m(t)$, $\theta_m\to\theta_m(t)$. Ezzel az $x(t)$ jel reprezentációja:

$$x(t) = \sum_{\substack{m=0 \\ (-\infty)}}^{\infty} \alpha_m \varphi_m(t), \text{ ahol } \alpha_m = (x(t), \theta(t)) \tag{192}$$

Példa: Fourier sorfejtés: $\varphi_m(t) = \exp(j2\pi mt)$, $\theta_m(t) = \exp(-j2\pi mt)$, m=0,1,…,N-1.

Integrál-transzformáció: a bázisoknál m szerint is végtelen finom felbontás, ill. végtelen dimenzió: a bázisokból összeáll egy kétváltozós függvény, a súlyozó együttható helyére pedig egy egyváltozós függvény lép. $m \to s$, ilyenkor

$$\boxed{x(t) = \int_S \alpha(s)\varphi(t,s)ds \quad \alpha(s) = \int_T x(t)\theta(s,t)dt} \tag{193}$$

integrál-transzformáció párok.

Példa: Fourier integrál: $\varphi(t,s) = 1/\theta(s,t) = \exp(j2\pi st)$.

Megjegyzések:

1. Diszkrét integrátor: a 43. ábrán látható rendszer időtartományi leírása:

   $\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + y(n)$, átviteli függvénye: $\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = z^{-1} + z^{-2} + \dots$.

   Egy ilyen rendszer a bemenetére adott értékeket az előző összeghez adja. Figyeljük meg, hogy az átviteli függvény átírásakor felhasználtuk a mértani sor összegképletét.

2. A Fourier integrál hatása: Az $x(t)$ jelet szorozzuk az $\exp(-j2\pi f_0 t)$ komplex exponenciálissal, aminek hatására a jel spektruma balra tolódik f_0-val. (Lásd 44. ábra.) Az integrálás végtelen keskeny alul-áteresztő szűrőnek felel meg, amelynek kimenetén az f_0 frekvenciánál érvényes spektrum-értéket kapjuk.

7.3. Megfigyelő jelfeldolgozási feladatokra

Jelölés: $\{c_m(n)\}$, $\{g_m(n)\}$ jelöli a bázis/reciprok bázis rendszereket, m,n = 0,1,…,N-1. A mérendő jelről azt tételezzük fel, hogy a bázis-rendszer elemek lineáris kombinációjaként áll elő, és a bázisvektorok dimenziójának megfelelő mintából álló diszkrét jel. A súlyozó együtthatókat bemenet nélküli, diszkrét integrátorokban tárolt értékek adják. (lásd 45. ábra.) Ezek az értékek a jelet generáló hipotetikus rendszer $x(n) = [x_0(n) \quad x_1(n) \quad \cdots \quad x_{N-1}(n)]^T$ állapotváltozói. Ezek $\hat{x}(n) = [\hat{x}_0(n) \quad \hat{x}_1(n) \quad \cdots \quad \hat{x}_{N-1}(n)]^T$ becslőjét megfigyelővel állítjuk elő. A hipotetikus jelgeneráló rendszert leíró egyenletek:

$$x(n+1) = x(n) \quad y(n) = c^T(n)x(n); \tag{194}$$

a megfigyelőt leíró egyenletek pedig:

$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + g(n)c^T(n)[x(n) - \hat{x}(n)] \tag{195}$$

A hibarendszer:

$$x(n+1) - \hat{x}(n+1) = (I - g(n)c^T(n))[x(n) - \hat{x}(n)] \tag{196}$$

$$x(n+1) - \hat{x}(n+1) = \prod_{k=0}^{n}(I - g(k)c^T(k))[x(0) - \hat{x}(0)] \tag{197}$$

N lépéses konvergenciát akkor kapunk, ha:

$$\prod_{k=0}^{N-1}(I - g(k)c^T(k)) = 0 \tag{198}$$

Ez viszont teljesül, ha $\{c_m(n)\}$, $\{g_m(n)\}$ bázis/reciprok bázis párt alkotnak ($m,n = 0,1,\dots,N-1$), ugyanis minden olyan tag, melyben szerepel $g(i)c^T(i)g(j)c^T(j)$, és $i \neq j$: nullát ad a bázis/reciprok bázis elemek ortogonalitásának köszönhetően, továbbá

$$\prod_{k=0}^{N-1}(I - g(k)c^T(k)) = I - \sum_{i=0}^{N-1} g(i)c^T(i) = 0\,. \qquad (199)$$

Megjegyzések:

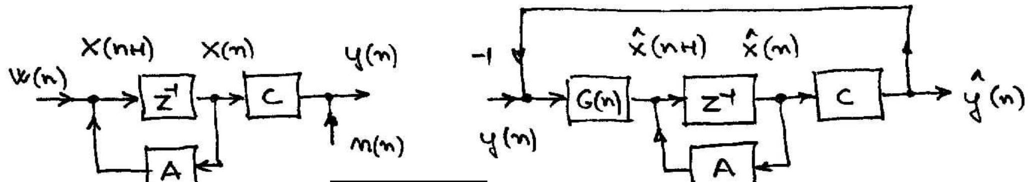
1. A diszkrét Fourier transzformáció (DFT) esetén:

$$\{c_m(n) = \exp(j\frac{2\pi}{N}mn)\}, \quad \{g_m(n) = \frac{1}{N}\exp(-j\frac{2\pi}{N}mn)\} \qquad (200)$$

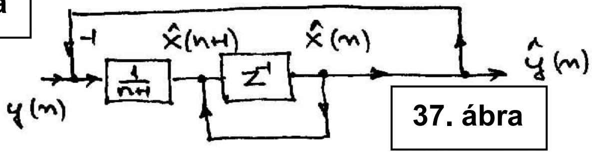
2. A $\sum_{k=0}^{N-1} g(k)c^T(k) = I$ bizonyítása: Írjuk fel a $g(k)c^T(k)$ diadikus szorzatot:

$$\begin{bmatrix} g_0(k) \\ g_1(k) \\ \vdots \\ g_{N-1}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0(k) & c_1(k) & \cdots & c_{N-1}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0(k)c_0(k) & g_0(k)c_1(k) & \cdots & g_0(k)c_{N-1}(k) \\ g_1(k)c_0(k) & g_1(k)c_1(k) & \cdots & g_1(k)c_{N-1}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1}(k)c_0(k) & g_{N-1}(k)c_1(k) & \cdots & g_{N-1}(k)c_{N-1}(k) \end{bmatrix}$$

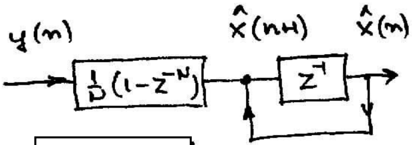
Ha ezek után, k-t futtatva, minden mátrix elemre végrehajtjuk az összegzést, akkor minden elem helyén egy-egy skalár-szorzatot számítunk ki, aminek eredményeképpen a főátlóban 1-esek, az összes többi helyen pedig 0-ák fognak állni.



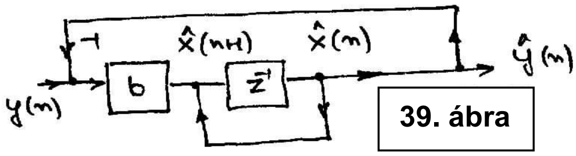
36. ábra



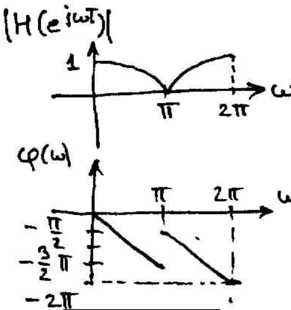
37. ábra



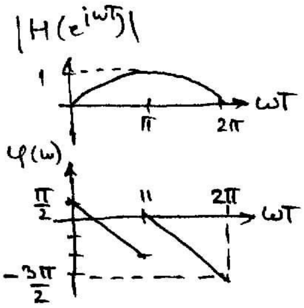
38. ábra



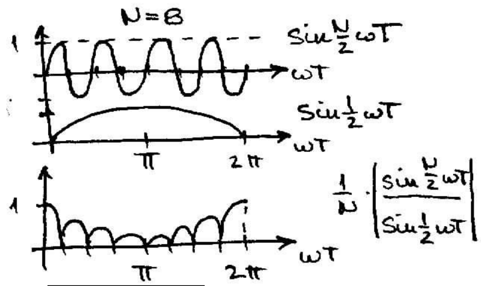
39. ábra



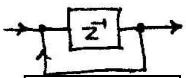
40. ábra



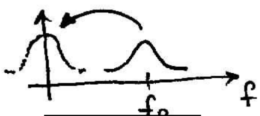
41. ábra



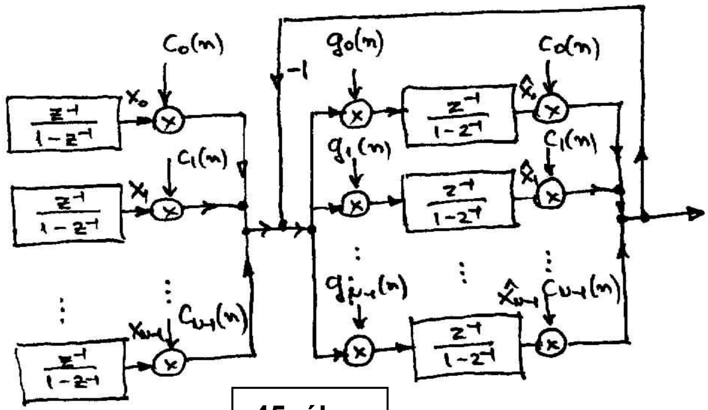
42. ábra



43. ábra



44. ábra



45. ábra