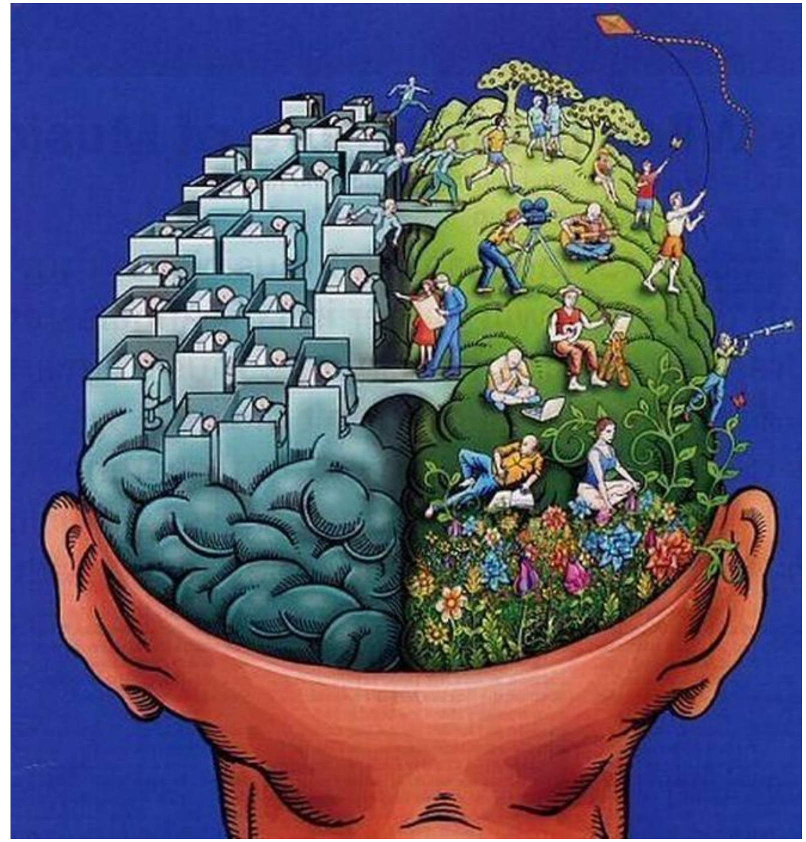
Mesterséges Intelligencia MI

Valószínűségi temporális következtetés



Dobrowiecki Tadeusz
Eredics Péter, és mások

BME I.E. 437, 463-28-99
dobrowiecki@mit.bme.hu,
http://www.mit.bme.hu/general/staff/tade

$\mathbf{X}_t$ - a *t* időpillanatban nem megfigyelhető változók halmaza

$\mathbf{E}_t$ - a megfigyelhető (megfigyelt) változók halmaza

$\mathbf{X}_{a:b} = \mathbf{X}_a\ \mathbf{X}_{a+1}\ , \ldots, \mathbf{X}_{\mathbf{b-1}}\ \mathbf{X}_{\mathbf{b}}$ - változók halmaza $\mathbf{X}_{\boldsymbol{a}}$–tól $\mathbf{X}_{\boldsymbol{b}}$–ig

(Pl. $U_{1:3} = U_1, U_2, U_3$ változók)

Egy titkos, földalatti létesítmény biztonsági őre tudni szeretne, hogy aznap esik-e, de egyetlen információja, hogy reggelenként látja az igazgatóját, aki esernyővel vagy esernyő nélkül jön be.

Minden *t* napon az $\mathbf{E}_t$ halmaz így egyetlen bizonyíték változó,

U_t (*van-e esernyője*),

és $\mathbf{X}_t$ halmaz az egyetlen állapotváltozó R_t (*esik-e kint*).

Probléma: szerkeszthető-e ilyen problémára egy valószínűségi háló?
Ha igen, milyen szülőkből lehet itt gazdálkodni?

Markov feltételek

Markov feltétel: X_t függ az $X_{0:t-1}$ korlátos részhalmazától

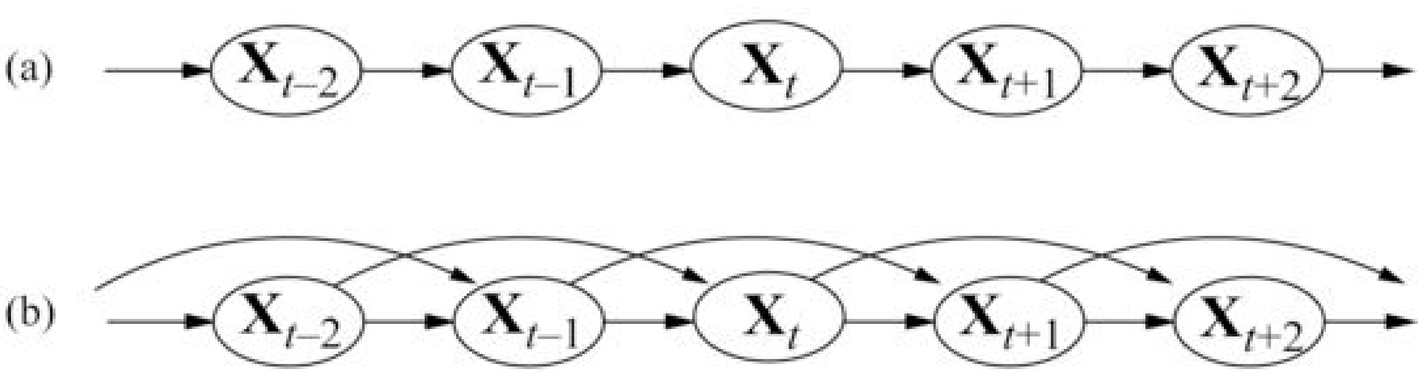
Elsőrendű (a) Markov folyamat: $P(X_t \mid X_{0:t-1}) = P(X_t \mid X_{t-1})$

Másodrendű (b) Markov folyamat: $P(X_t \mid X_{0:t-1}) = P(X_t, \mid X_{t-2}, X_{t-1})$
stb.

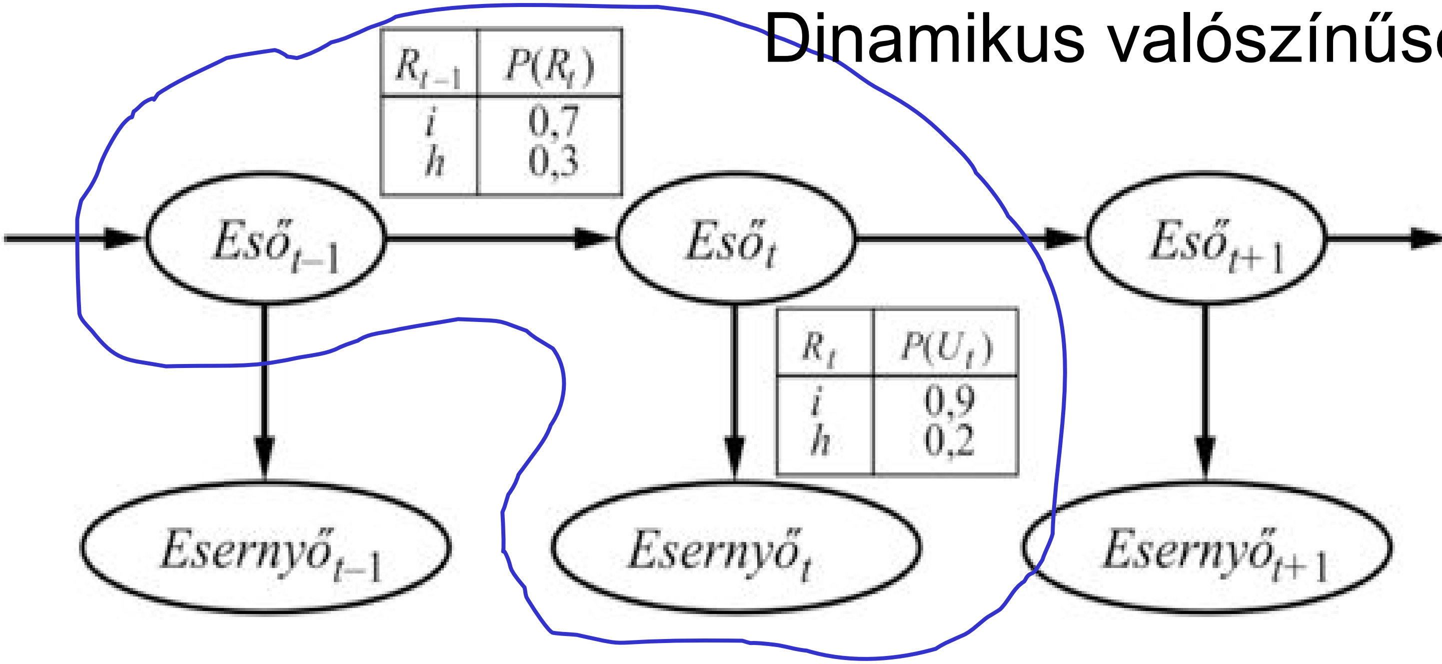
Érzékelő Markov feltétel: $P(E_t \mid X_{0:t}, E_{0:t-1}) = P(E_t \mid X_t)$

Stacionárius folyamat: állapotátmenet modell $P(X_t \mid X_{t-1})$

és érzékelő/megfigyelés modell $P(E_t \mid X_t)$ nem függ a t-től



Dinamikus valószínűségi hálók



Ha a közelítés túlságosan pontatlan - lehet javítani, pl.:

a Markov folyamat **rendjének növelésével**
pl. egy másodrendű modellt felvéve egy *Eső*$_{t-2}$-őt mint az *Eső*$_t$ szülője (valamivel pontosabb predikció).

az **állapotváltozók halmazának növelésével**
pl. felvenni az *Évszak*$_t$ változót, vagy hozzáadni a *Hőmérséklet*$_t$, a *Páratartalom*$_t$ és a *Légnyomás*$_t$ változókat...

Következtetés időbeli modellekben

Szűrés v. **ellenőrző megfigyelés**: a **bizonyossági, hiedelmi állapot** kiszámítása = a jelenlegi állapot a posteriori eloszlása, az eddigi összes bizonyíték ismeretében

$$P(X_t \mid e_{1:t})$$

Előrejelzés, jóslás: egy jövőbeli állapot a posteriori eloszlása, az eddigi összes bizonyíték ismeretében.

$$P(X_{t+k} \mid e_{1:t}) \quad , \ k > 0$$

Simítás, **visszatekintés**: egy múltbeli állapot a posteriori eloszlása, a jelen időpontig vett összes bizonyíték ismeretében.

$$P(X_k \mid e_{1:t}) \quad , \quad 0 \le k < t$$

Legvalószínűbb magyarázat:
A megfigyelések ismeretében megtalálni azt az állapotsorozatot, ami a leginkább valószínű, hogy az adott megfigyeléseket generálta.

$$\arg\max_{x_{1:t}} P(x_{1:t} \mid e_{1:t})$$

és a munkalovak

$$P(A) = \sum_{\xi} P(A\xi) \qquad P(A \mid B\,c) = \alpha\, P(B \mid Ac)\, P(A \mid c)$$

Szűrés

$$P(X_{t+1} \mid e_{1:t+1}) = f(e_{t+1}, P(X_t \mid e_{1:t}))$$

$$P(X_{t+1} \mid e_{1:t+1}) = P(X_{t+1} \mid e_{1:t}, e_{t+1})$$ (felosztva a bizonyítékot)

$$= \alpha P(e_{t+1} \mid X_{t+1}, e_{1:t}) P(X_{t+1} \mid e_{1:t})$$ (a Bayes szabállyal)

$$= \alpha P(e_{t+1} \mid X_{t+1}) P(X_{t+1} \mid e_{1:t})$$ (a bizonyíték Markov tulajdonsága miatt)

rekurzív becslés

$$P(X_{t+1} \mid e_{1:t+1}) = \alpha P(e_{t+1} \mid X_{t+1}) \sum_{x_t} P(X_{t+1} \mid x_t, e_{1:t}) P(x_t \mid e_{1:t})$$

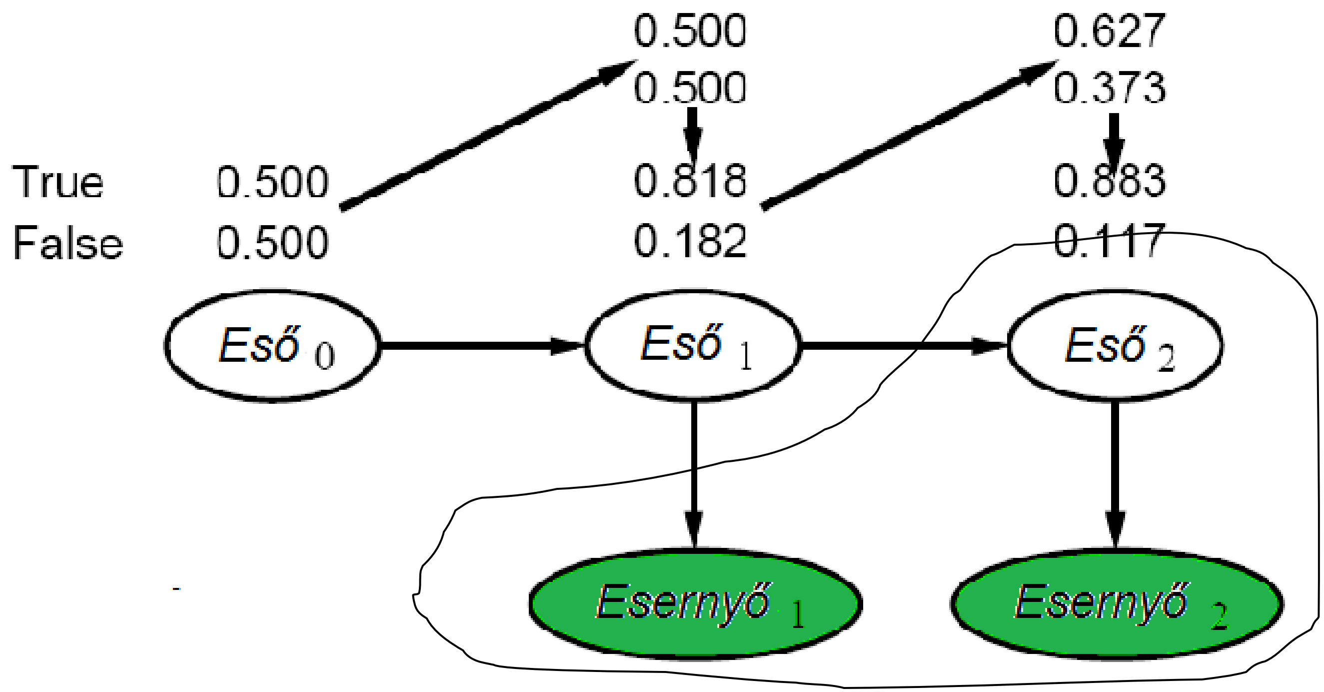
$$= \alpha P(e_{t+1} \mid X_{t+1}) \sum_{x_t} P(X_{t+1} \mid x_t) P(x_t \mid e_{1:t})$$ (kihasználva a Markov tul-t).

Lineáris rekurzív becslés

$$\mu_{N+1} = f(e_{N+1}, \mu_N) \qquad \mu_N = \frac{1}{N}(e_1 + e_2 + \ldots + e_N) \qquad e_t = a + N(0, \sigma)$$

$$\mu_{N+1} = \mu_N + \frac{1}{N+1}(e_{N+1} - \mu_N) = \frac{N}{N+1}\mu_N + \frac{1}{N+1} e_{N+1}$$

Szűrés



1. nap: az esernyő feltűnik, ***U1 = igaz.***
Előrejelzés t = 0-ról t = 1-re: $\mathbf{P}(R1) = \Sigma_{r0}\, \mathbf{P}(R1|r0)\, \mathbf{P}(r0) = <.7;.3>\ <.5;.5> = <.5;.5>$
a t =1-beli bizonyítékkal való frissítés azt adja, hogy
$\mathbf{P}(R1|U1) = \alpha\, \mathbf{P}(U1|R1)\, \mathbf{P}(R1) = \alpha <.9;.2>\ <.5;.5> = \alpha <.45;.1> \approx <.818;.182>$.

2. nap: az esernyő feltűnik, ***U2 = igaz.***
Előrejelzés t =1-ről t =2-re:
$\mathbf{P}(R2|U1) = \Sigma_{r1}\, \mathbf{P}(R2|r1)\, \mathbf{P}(r1|U1) = <.7;.3>\ <.818;.182> \approx <.627;.373>$
a t=2-beli bizonyítékkal való frissítés pedig azt adja, hogy
$\mathbf{P}(R2|U1,U2) = \alpha\, \mathbf{P}(U2|R2)\, \mathbf{P}(R2|U1)$
$= \alpha <.9;.2><.627;.373> = \alpha <.565;.075> \approx <.883;.117>$.

Előrejelzés $P(X_{t+1} \mid e_{1:t}) \rightarrow \sum_{x_t} P(X_{t+1} \mid x_t) P(x_t \mid e_{1:t})$

Mi történik, ahogy egyre távolabbra próbálunk előre jelezni a jövőben?

Megmutatható, hogy az *Eső* előre jelzett eloszlása a <.5; .5> **fix ponthoz** konvergál, ami után állandó marad a továbbiakban.

Ez az átmenet modell által meghatározott Markov folyamat un. **stacionárius eloszlása**.

Keverési idő (mixing time) – kb. a fix pont eléréséig eltelt idő.

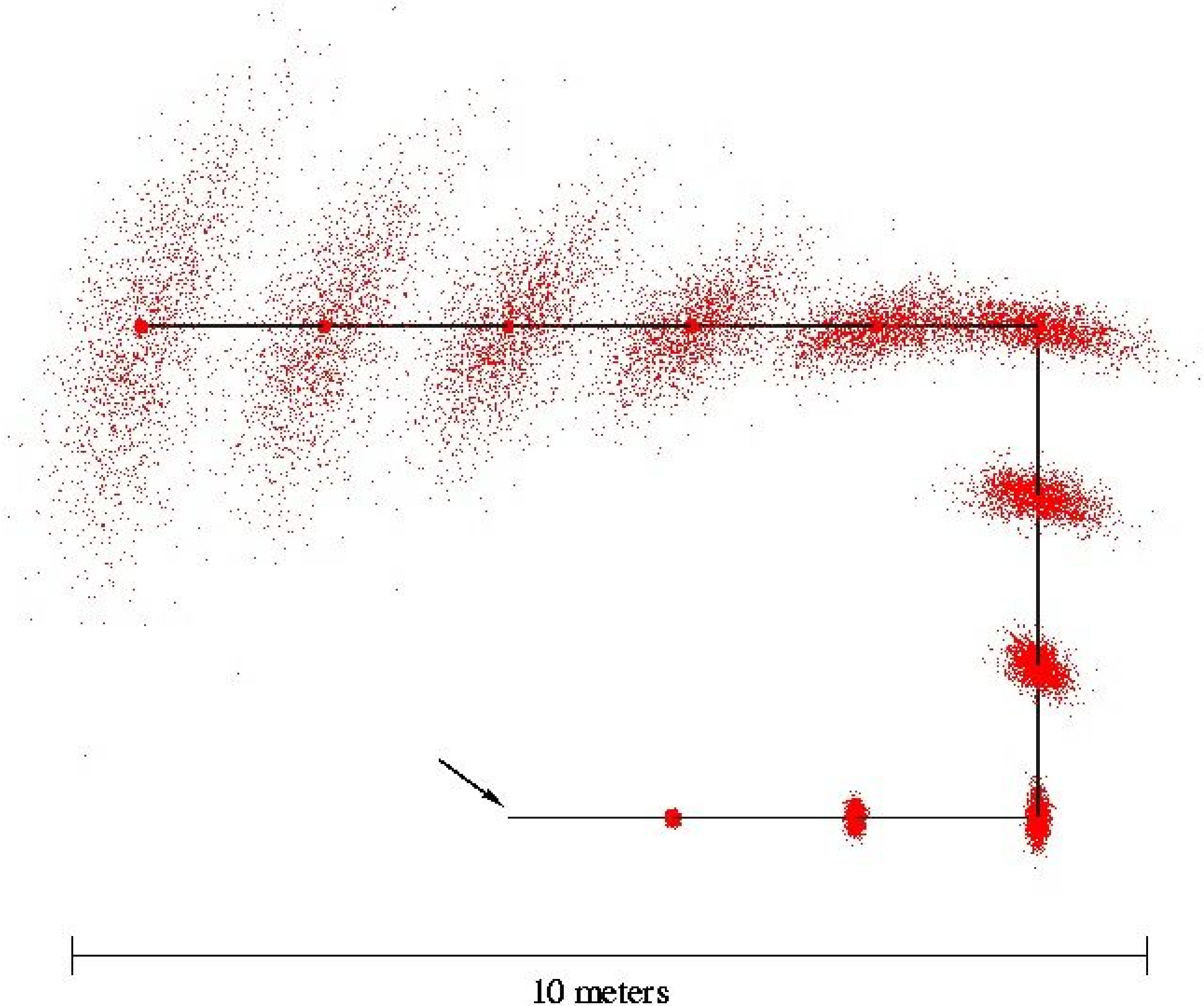
Gyakorlatban kudarc minden olyan kísérlet, ami a keverési idő kis hányadánál nagyobb számú lépés múlva kísérli meg az aktuális állapotot előrejelezni.

Minél bizonytalanabb az átmeneti modell,
annál rövidebb a keverési idő és a jövő annál homályosabb.

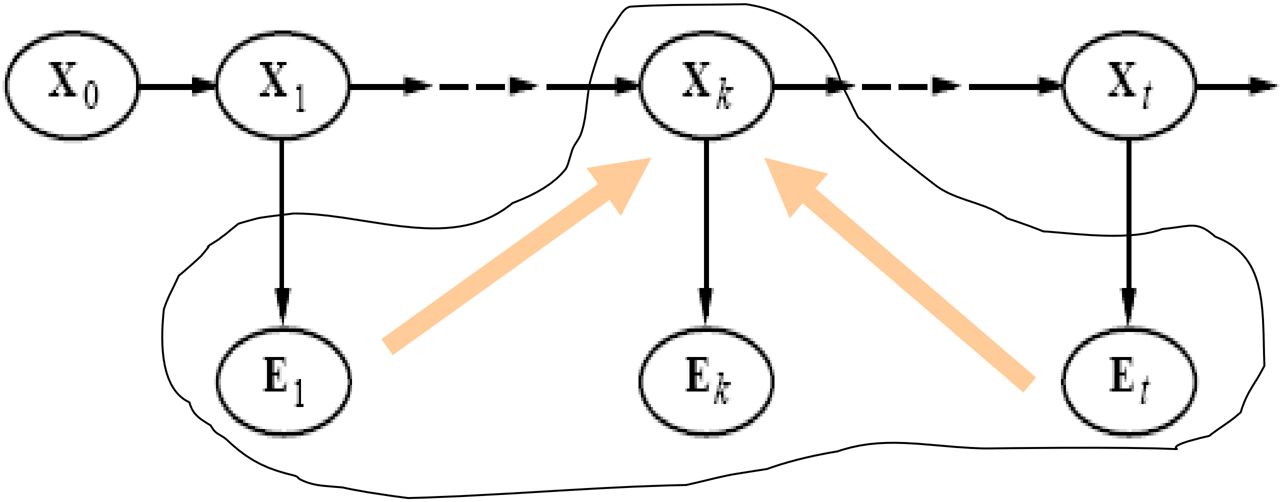
$$P(X_{t+2} \mid e_{1:t}) \rightarrow \sum_{x_{t+1}} P(X_{t+2} \mid x_{t+1}) P(x_{t+1} \mid e_{1:t})$$

$$= \sum_{x_{t+1}} P(X_{t+2} \mid x_{t+1}) \sum_{x_t} P(x_{t+1} \mid x_t) P(x_t \mid e_{1:t})$$

Pozíció előrejelzése



Simítás



$$P(X_k \mid e_{1:t}) = P(X_k \mid e_{1:k}, e_{k+1:t})$$ (Bayes szabály)

$$= \alpha P(X_k \mid e_{1:k}) P(e_{k+1:t} \mid X_k, e_{1:k})$$ (a feltételes függetlenség)

$$= \alpha P(X_k \mid e_{1:k}) P(e_{k+1:t} \mid X_k)$$

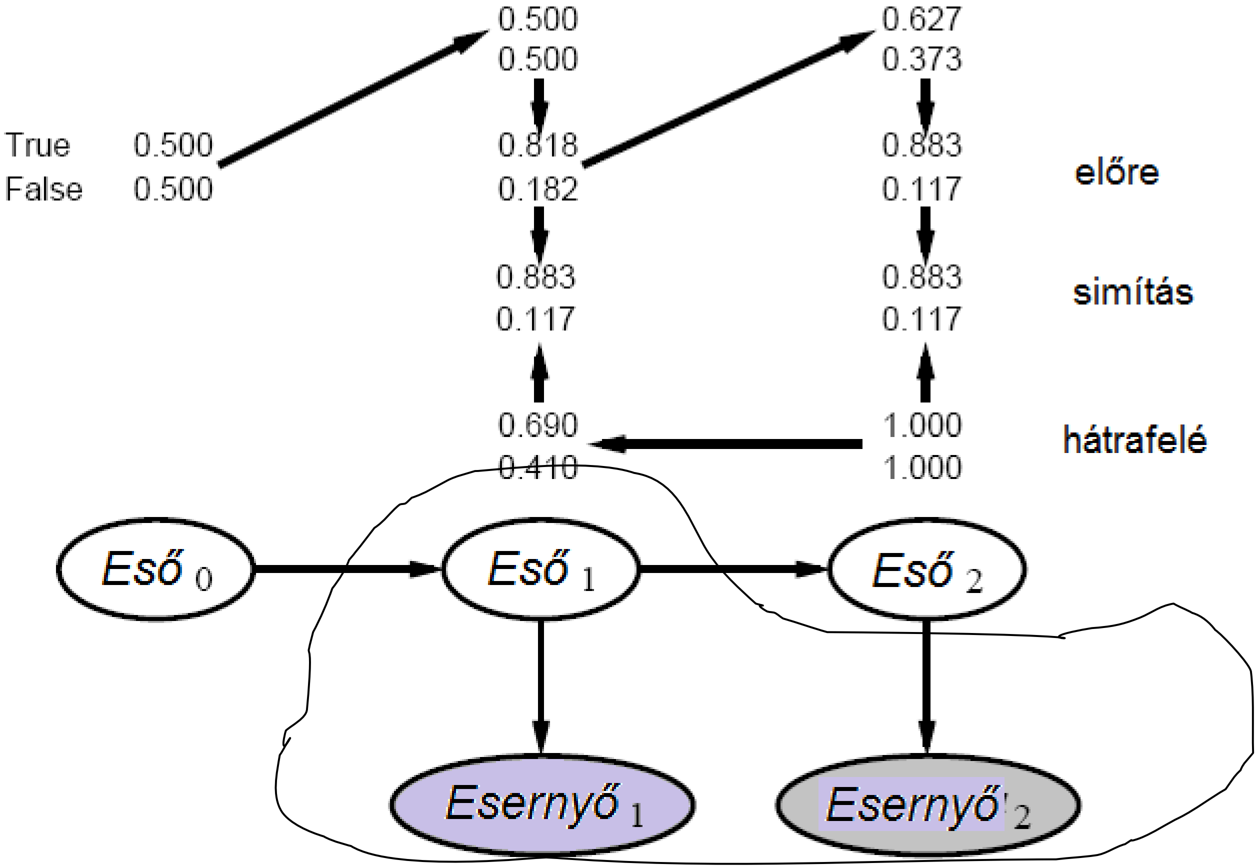
$$P(e_{k+1:t} \mid X_k) = \sum_{x_{k+1}} P(e_{k+1:t} \mid X_k, x_{k+1}) P(x_{k+1} \mid X_k)$$

$$= \sum_{x_{k+1}} P(e_{k+1:t} \mid x_{k+1}) P(x_{k+1} \mid X_k)$$

$$= \sum_{x_{k+1}} P(e_{k+1} \mid x_{k+1}) P(e_{k+2:t} \mid x_{k+1}) P(x_{k+1} \mid X_k)$$

egy egyszerű rekurzív folyamattal kiszámítható

előre-hátra algoritmus



Az Eső valószínűségének simított becslése t =1-nél, az 1. és 2. napi evidenciából:

$\mathbf{P}(R1|U1,U2) = \alpha\ \mathbf{P}(R1|U1)\ \mathbf{P}(U2|R1)$.

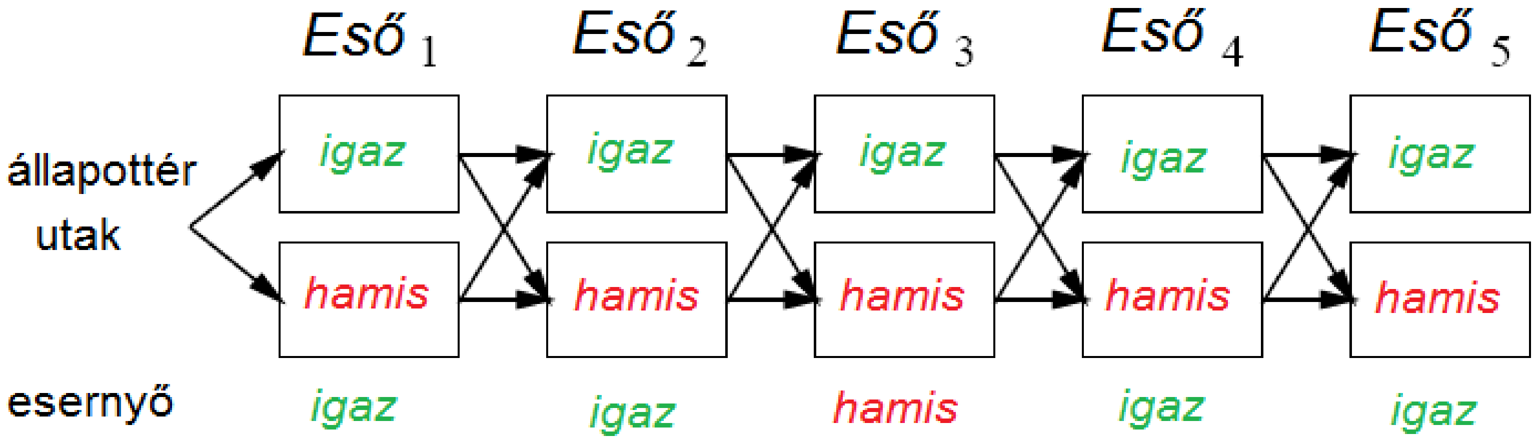
A korábbi szűrésből az első tényező <.818;.182>.

$\mathbf{P}(U2|R1) = \Sigma_{r2}\ \mathbf{P}(U2|r2)\ \mathbf{P}(Ø|r2)\ \mathbf{P}(r2|R1)$ = .9 x 1 x .7 + .2 x 1 x .3; = <.69;.41>.

Az Eső simítása az 1. napon $\mathbf{P}(R1|U1,U2) = \alpha$ <.818;.182> <.69;.41> ≈ <.883;.117>.

A simított becslés jobb, mint a szűrt becslés (.818). Az Esernyő a 2. napon valószínűbbé teszi, hogy esett a 2. napon, és mivel az eső tartósan esik, még valószínűbbé teszi, hogy esett az 1. napon.

A legvalószínűbb sorozat megtalálása – Viterbi algoritmus



Megfigyelt sorozat: igaz, igaz, hamis, igaz, igaz

Mi a legvalószínűbb: Eső1, Eső2, ..., Eső5 értéke?

$2^5 = 32$ lehetséges sorozat, de lehet egy becslés felsorolás nélkül? Fokozatos szűrések, simítások?

A legvalószínűbb sorozat megtalálása – Viterbi algoritmus

A legvalószínűbb sorozat =/= a **legvalószínűbb állapotok sorozata!!!**

A legvalószínűbb sorozat X_{t+1} -hez

= a legvalószínűbb sorozat valamelyik X_t-hez és egy lépéssel tovább

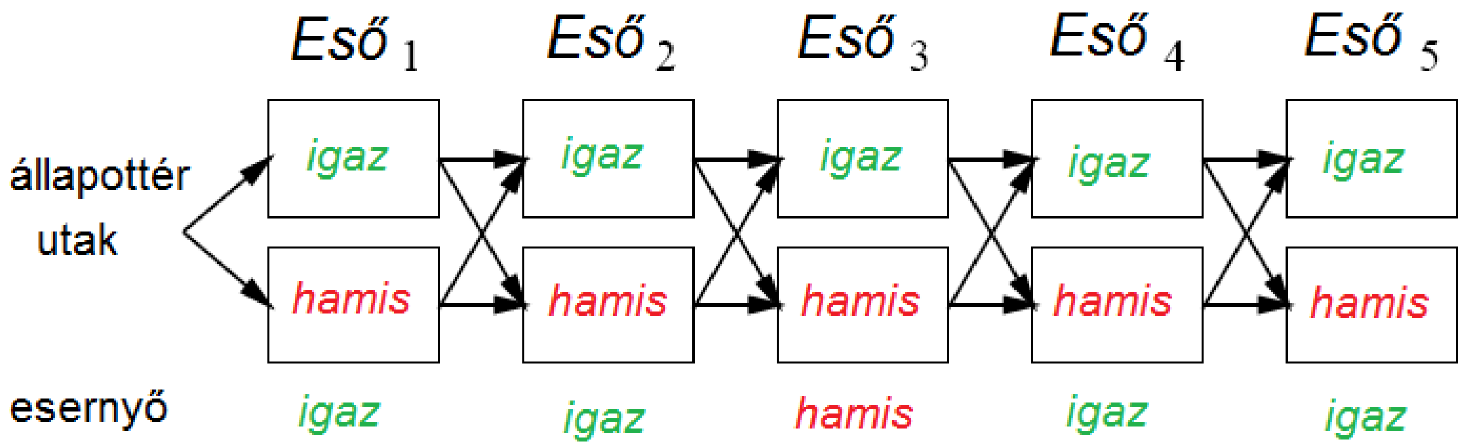
$$\max_{x_1,\ldots,x_t} P(x_1, x_2, \ldots, x_t, X_{t+1} \mid e_{1:t+1})$$
$$= P(e_{t+1} \mid X_{t+1}) \max_{x_t}(P(X_{t+1} \mid x_t) \max_{x_1,\ldots,x_{t-1}} P(x_1, x_2, \ldots, x_{t-1}, x_t \mid e_{1:t})))$$

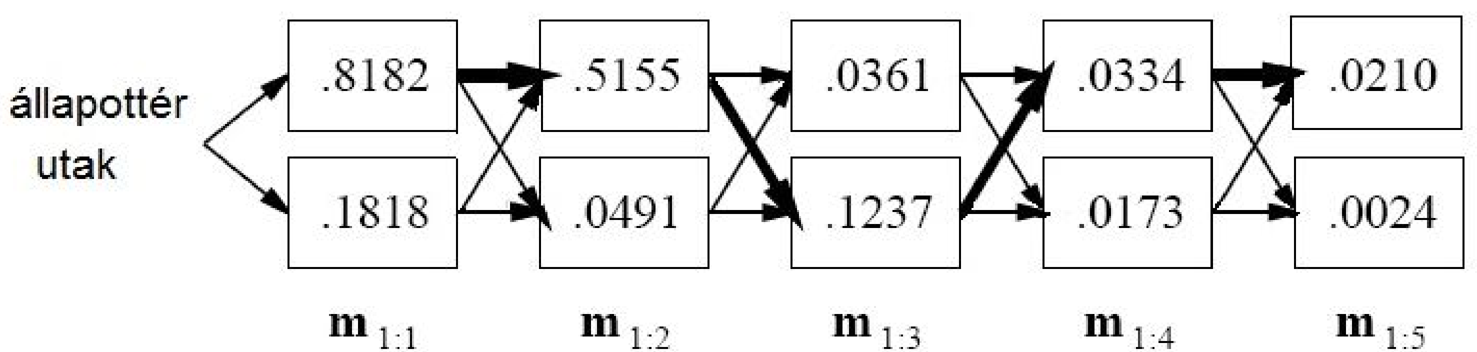
$m_{1:t}(i)$ megadja az i állapothoz vezető pálya valószínűségét.

Félfrissítésben összeg helyett max szerepel.

$$m_{1:t+1} = P(e_{t+1} \mid X_{t+1}) \max_{x_t}(P(X_{t+1} \mid x_t)\, m_{1:t})$$

A legvalószínűbb sorozat megtalálása – Viterbi algoritmus





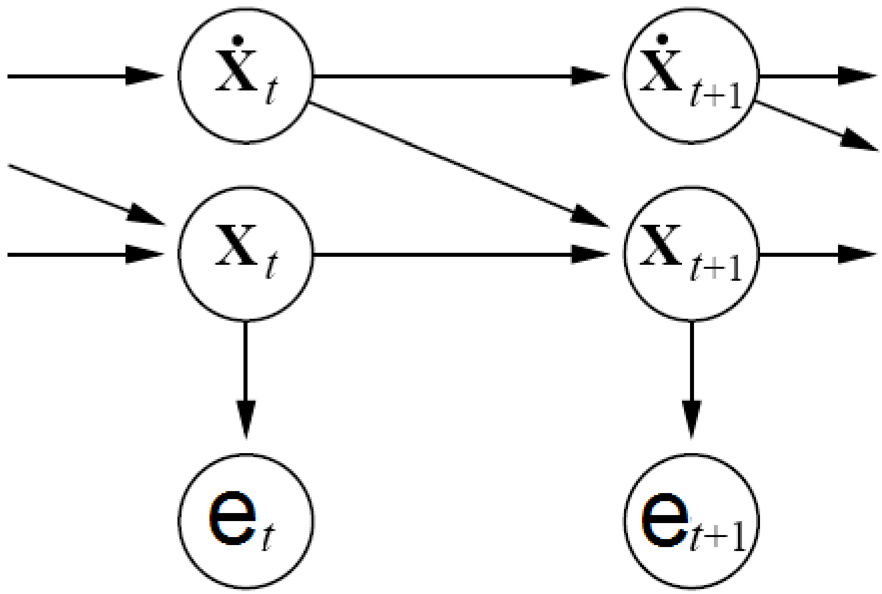
Rejtett Markov modell (RMM) (Hidden Markov Model, HMM)

RMM egy időbeli valószínűségi modell. A folyamat állapotát ***egyetlen diszkrét*** valószínűségi változó írja le. A modell tulajdonsága a rejtett állapot, azaz a (sztochasztikus) állapotfejlődés és annak passzív (sztochasztikus) megfigyelése.

(N tulajdonság, M tünet??)

Kálmán-szűrő

Egy fizikai rendszer állapotának becslése (pl. hely, sebesség) időben egymást követő zajos megfigyelésekből:



átmenetmodell = a mozgás fizikája
érzékelő modell = a mérési folyamat

folytonos változók!

Gauss kiinduló eloszlás,
lineáris Gauss állapotátmenet modell
és megfigyelési modell

Gauss eloszlások frissítése

Ha **szűrés** $P(X_t \mid e_{1:t})$ Gauss, és az **állapotátmenet** is Gauss,

akkor a $P(X_{t+1} \mid e_{1:t}) = \int_{x_t} P(X_{t+1} \mid x_t) P(x_t \mid e_{1:t}) dx_t$ **jóslás** is Gauss.

Ha a **jóslás** $P(X_{t+1} \mid e_{1:t})$ Gauss, és a **megfigyelés** is az, akkor
a **frissített eloszlás** is Gauss. $P(X_{t+1} \mid e_{1:t+1}) = \alpha P(e_{t+1} \mid X_{t+1}) P(X_{t+1} \mid e_{1:t})$

tehát egy **többváltozós** Gauss $N(\mu_t, \Sigma_t)$ minden t-re.

Általános (nemlineáris, nem Gauss) folyamat esetében:
a posterior leírása korlátlanul nő, t $\rightarrow \infty$! $P(X_t \mid e_{1:t})$

Általános Kálmán frissítés

Állapot átmeneti és megfigyelés modellek:

$$x_{t+1} = \mathrm{F}x_t + w_t$$

$$e_{t+1} = \mathrm{H}x_t + v_t$$

$$P(x_{t+1} \mid x_t) = N(\mathrm{F}x_t, \Sigma_x)(x_{t+1})$$

$$P(e_t \mid x_t) = N(\mathrm{H}x_t, \Sigma_e)(e_t)$$

$$\hat{x}_{t+1} = \mathrm{F}\hat{x}_t + \mathrm{K}_{t+1}(e_{t+1} - \mathrm{HF}\hat{x}_t) \qquad \Sigma_{t+1} = (\mathrm{I} - \mathrm{K}_{t+1})(\mathrm{F}\Sigma_t\mathrm{F}^T + \Sigma_x)$$

F az állapot átmeneti mátrix; Σ_x az állapot zaj (w) kovarianciája

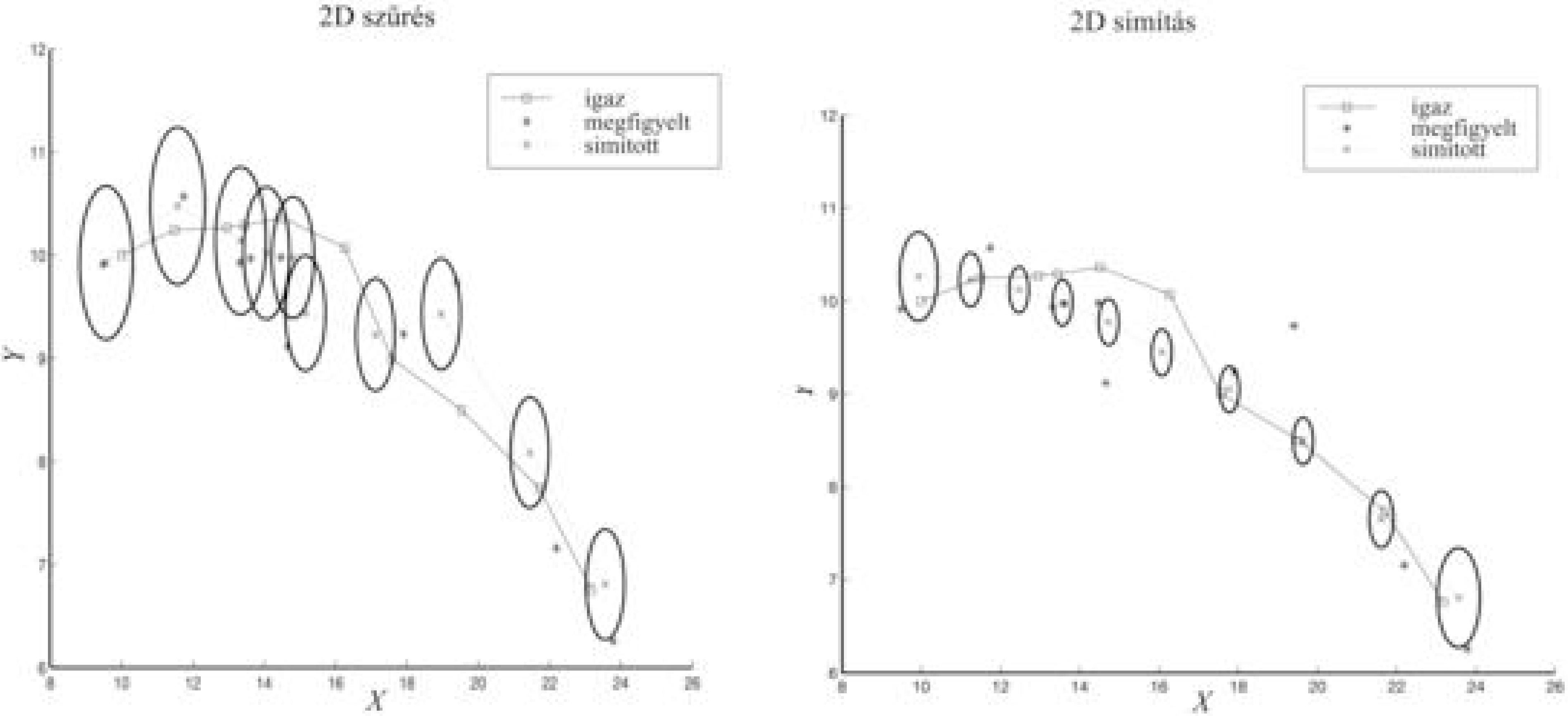
H a megfigyelés mátrixa, $\boldsymbol{\Sigma_z}$ a megfigyelési zaj (v) kovarianciája

$$\mathrm{K}_{t+1} = (\mathrm{F}\Sigma_t\mathrm{F}^T + \Sigma_x)\mathrm{H}^T(\mathrm{H}(\mathrm{F}\Sigma_t\mathrm{F}^T + \Sigma_x)\mathrm{H}^T + \Sigma_e)^{-1}$$

az un. **Kálmán erősítés mátrix**

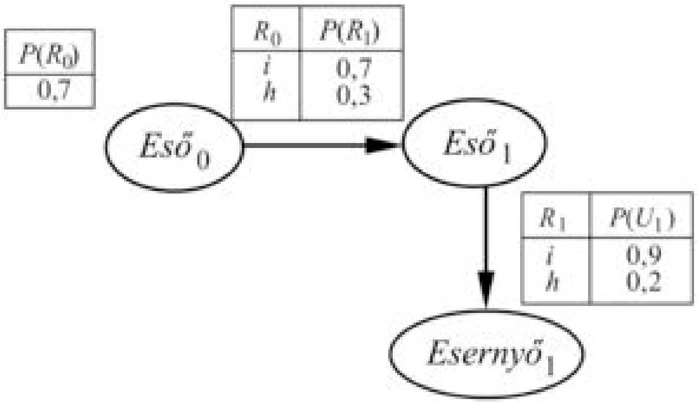
A K_t, Σ_t a megfigyelésektől függetlenek, számíthatók off-line

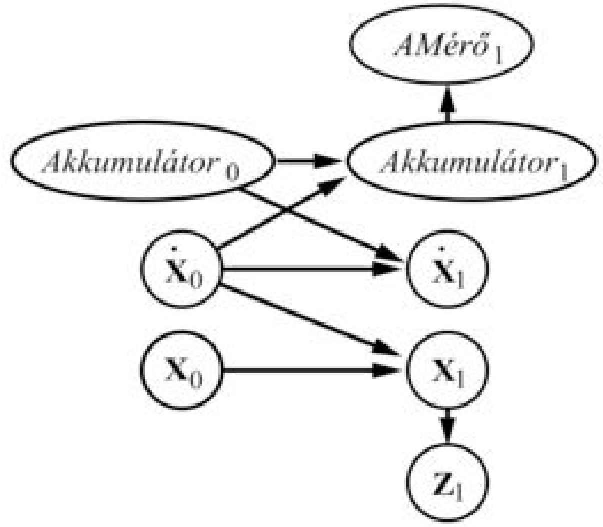
2-D követés - példa

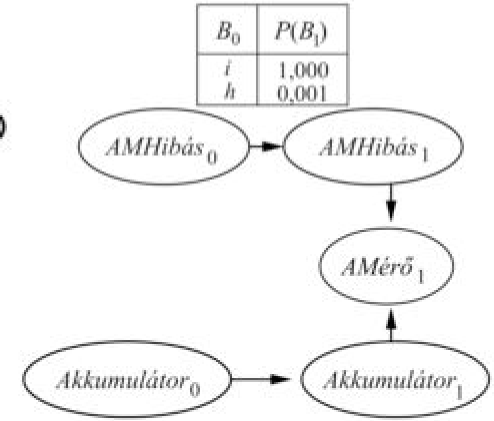


(a) (b)

Dinamikus Bayes háló







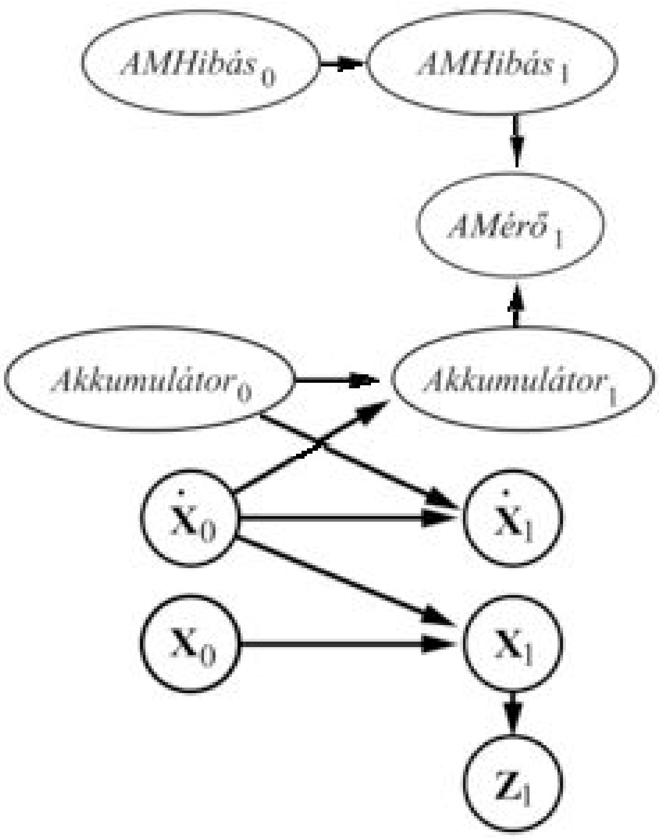
Minden egyes szeletben tetszőleges számú állapotváltozója ($\mathbf{X}_t$) és bizonyítékváltozója ($\mathbf{E}_t$) lehet.

Egyszerűsítés: a változók és kapcsolataik pontosan ismétlődnek szeletről szeletre = elsőrendű Markov folyamat, így minden változónak csak a saját szeletében vagy a közvetlenül megelőző szeletben lehetnek szülei.

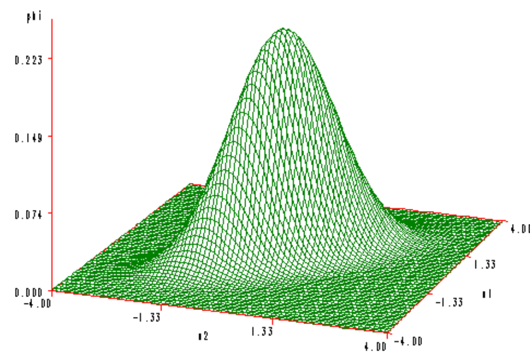
Minden RMM reprezentálható, mint egy DBH egyetlen állapotváltozóval és egyetlen bizonyítékváltozóval.
Minden diszkrét változós DBH reprezentálható, mint egy RMM. A DBH összes állapotváltozója összekombinálható egyetlen állapotváltozóvá, aminek az értékei az egyes állapotváltozók értékeinek az együttese.

Minden Kálmán-szűrő reprezentálható egy DBH-ban folytonos változókkal és lineáris Gauss feltételes eloszlásokkal

De nem minden DBH reprezentálható egyetlen Kálmán-szűrő modellel.
Kálmán-szűrő: az aktuális állapoteloszlás mindig egy egyedülálló többváltozós Gauss eloszlás – egyetlen „dudor” egy konkrét helyen.
A DBH-k ezzel szemben tetszőleges eloszlást képesek modellezni



Bivariate Normal Density – r= 0.7



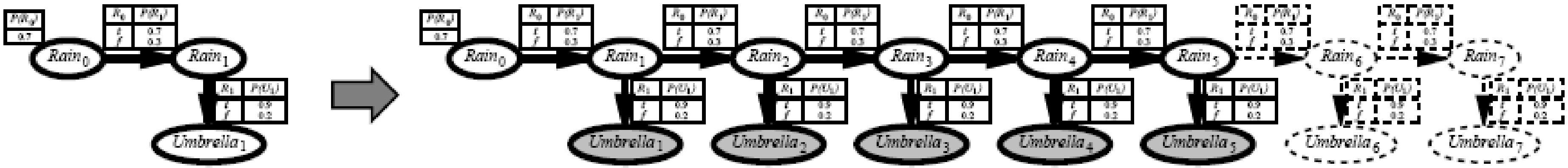
$$f_X(x_1,\ldots,x_N) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\,|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho xy}{(\sigma_x\sigma_y)}\right]\right)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix}.$$

Egzakt következtetés DBH-kban

Naiv módszer: a háló kibontása és akármilyen egzakt algoritmus.



Probléma: következtetés költsége idővel nő. Kibontásos szűrés: t+1 szelet hozzáadása, t szelet kiösszegzése változó eliminálással. Faktorok nagysága, felfrissítés költsége exponenciális, nincs pontos és hatékony következtetés.

Közelítő következtetés DBH-kban

Valószínűségi súlyozás: pontossága leromlik, ha a bizonyítékváltozók „lentebbiek" a mintavételezett változóknál, ekkor a minták generálására nincsen hatással a bizonyíték.
Egy DBH tipikus struktúrája: Az *állapotváltozók egyikének sincs egyetlen bizonyítékváltozója sem* az ősei között!
Egy adott pontossági szint fenntartásához, a minták számát exponenciálisan növelni kell *t* függvényében.

Részecske szűrés (particle filter)

	Kalman szűrő	**Részecske szűrő**
Állapotegy.	Lineáris állapot és megfigyelési egyenlet	**Nemlineáris** állapot és megfigyelési egyenlet
Zaj típusa	Gauss, unimodális	**Akármilyen**, uni- v. multimodális
Kimenet	$\hat{x}_t$ Σ_t	$p(x_t)$
Megoldás	Egzakt, optimális	**Közelítő**
Számítás	Gyors	Lassú

Egzakt modell közelítő megoldása, a közelítő modell egzakt megoldása helyett

(Sequential) Monte Carlo filters
Bootstrap filters
Condensation
Interacting Particle Approximations
Survival of the fittest

Részecske szűrés (particle filter)

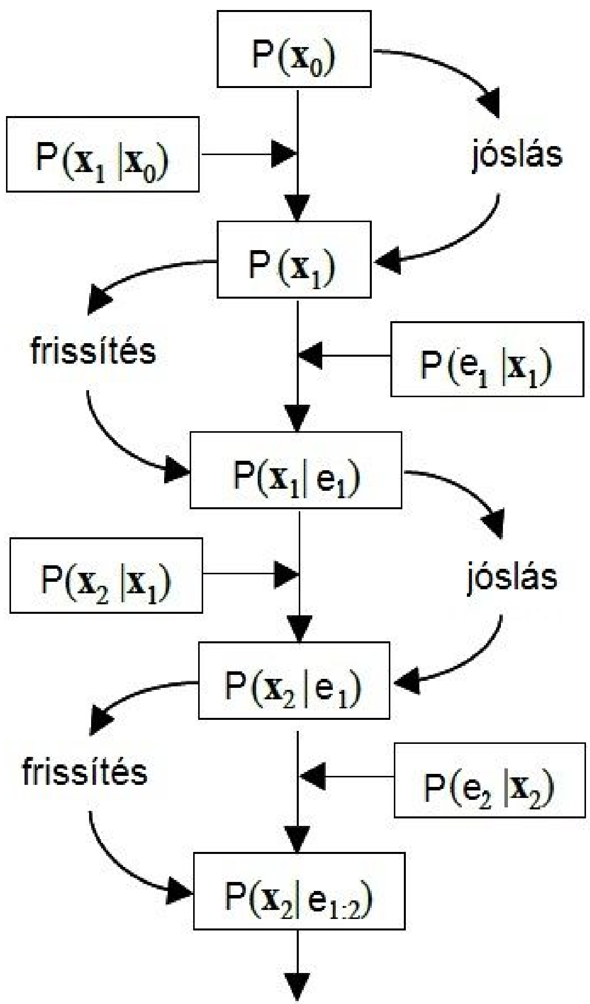
rekurzív szűrés

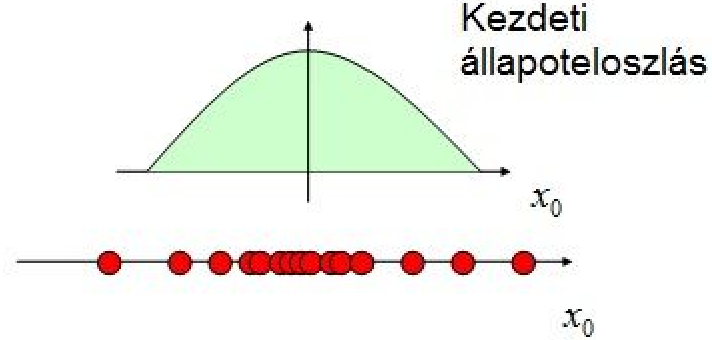
$$P(X_{t+1} \mid e_{1:t+1}) = \alpha P(e_{t+1} \mid X_{t+1}) \sum_{x_t} P(X_{t+1} \mid x_t) P(x_t \mid e_{1:t})$$

frissítés evidenciával

jóslás dinamikával

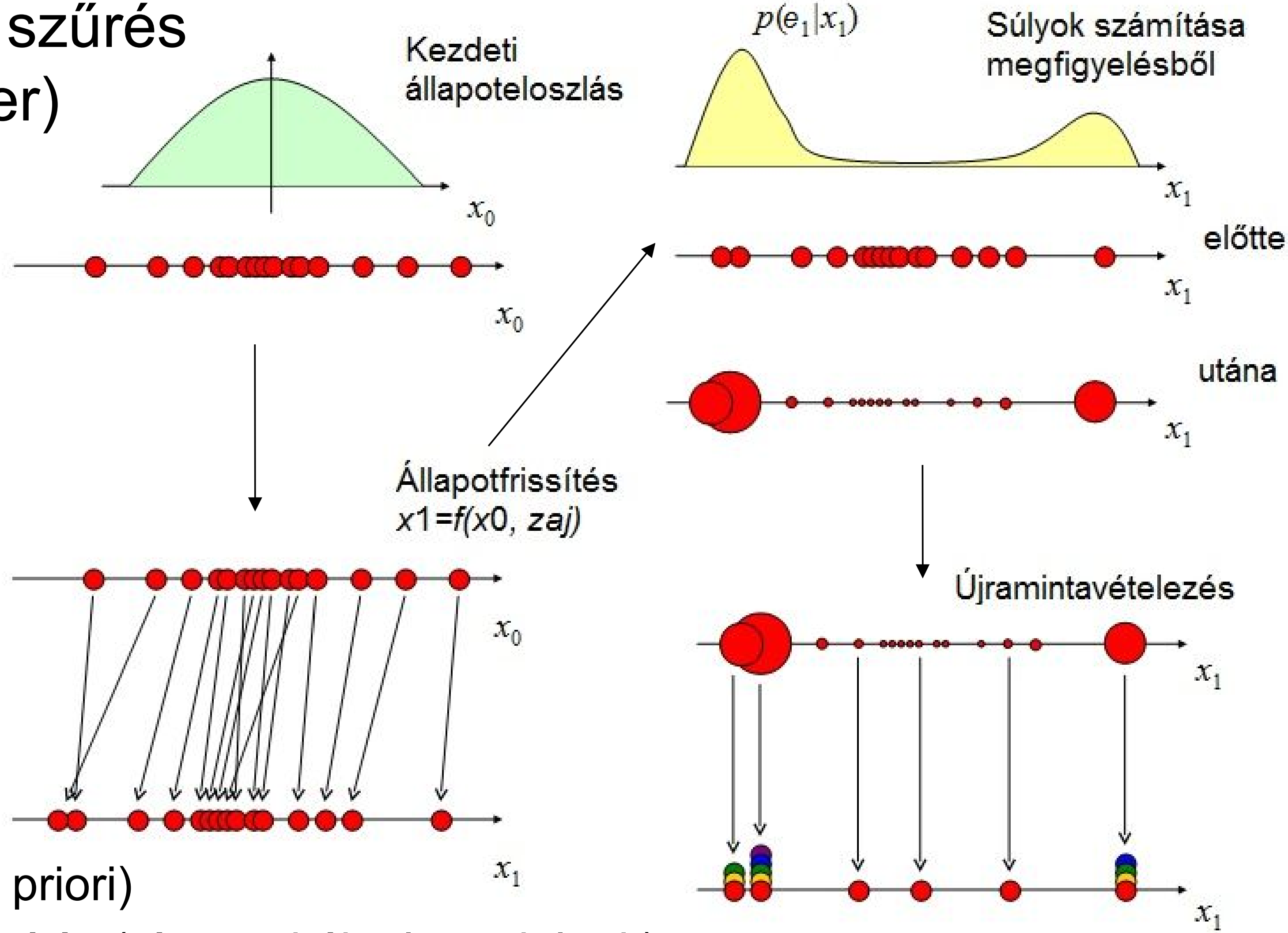
részecskefelhő





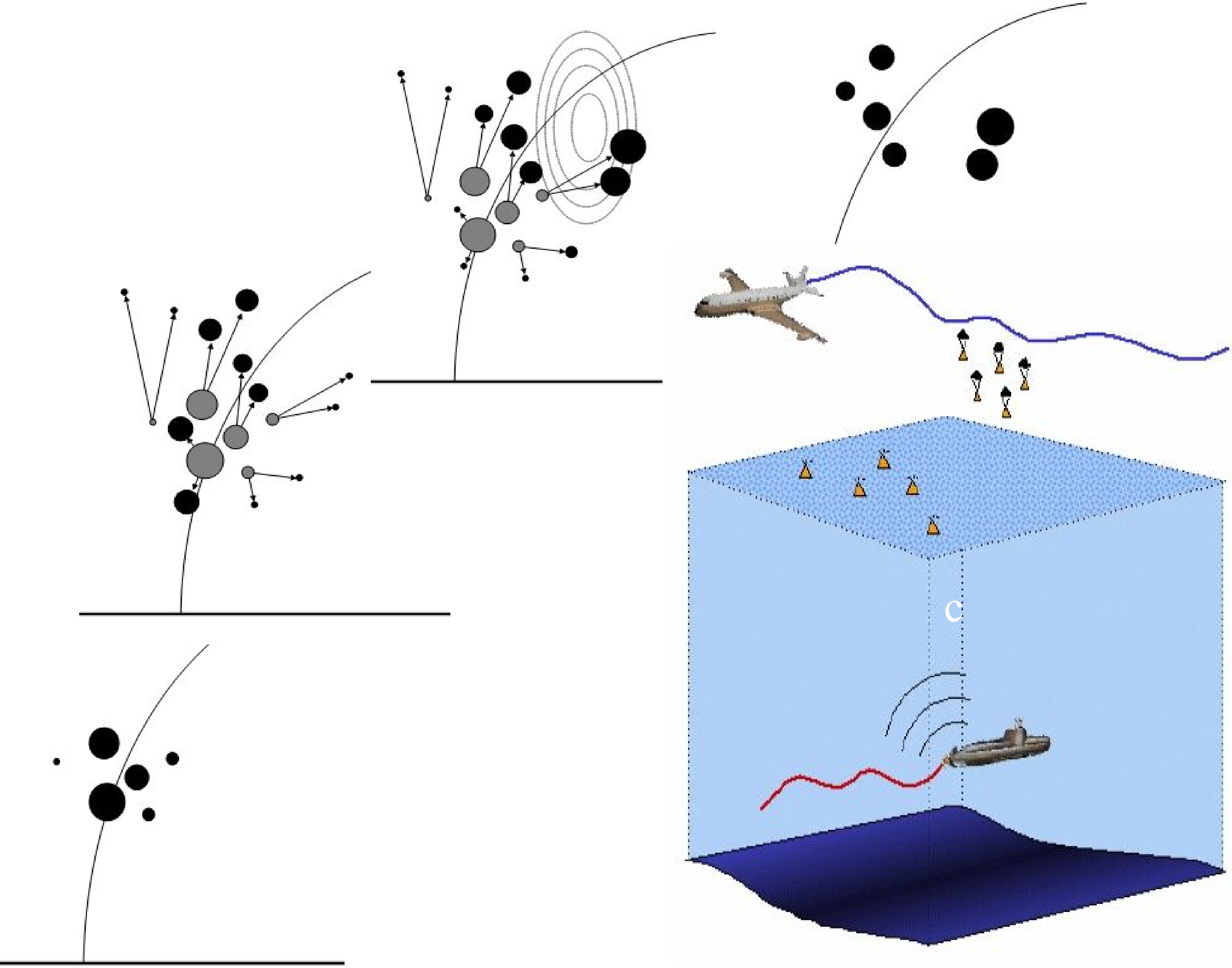
$$P_N(x_{0:t} \mid \mathbf{e}_{1:t}) = \sum_{i=1}^{N} w_t^i \, \delta(x_{0:t} - x_{0:t}^i)$$

Részecske szűrés (particle filter)



<u>Alap algoritmus:</u>

1. Inicializálás (a priori)
2. Dinamikus frissítés (részecskék elmozdulnak)
3. Evidenciafüggő frissítés (súlymódosítás)
4. Újramintavételezés (ha szükséges)
5. Új evidencia - goto 2


c